

# Préconditionneurs multi-domaine/multi-méthode pour la résolution efficace de problèmes de diffraction d'onde en électromagnétisme

T. Galtier<sup>1</sup>, D. Levadoux<sup>1</sup>  
<sup>1</sup>ONERA, Toulouse, France

Email : timothee.galtier@onera.fr

**Résumé**—L'hétérogénéité géométrique de certains problèmes de diffraction d'onde rend problématique la synthèse d'un preconditionneur optimal. Pour contrer cette difficulté, nous développons un preconditionneur multi-domaine et multi-méthode. Son principe repose sur une partition de la géométrie initiale en différents corps et l'emploi sur chaque corps d'une technique optimale de preconditionnement choisie parmi un panel d'algorithmes. Les preconditionneurs locaux synthétisés sur les corps sont alors "reconcaténés" sur l'objet initial afin de définir un preconditionneur global et quasi-optimal. Nous visons la conception d'un preconditionneur capable de traiter efficacement certains cas d'application réputés difficiles tels un avion d'arme avec son entrée d'air moteur.

## I. CONTEXTE

Les problèmes de diffraction d'onde peuvent être formulés sous forme intégrale, puis résolus par la méthode des éléments finis de frontières (*Boundary Element Method* ou BEM). Toutefois la BEM requiert la résolution de systèmes linéaires pleins, de grandes dimensions et mal conditionnés. Diverses techniques de preconditionnement existent mais chacune étant limitée au traitement de géométries bien spécifiques. Or les applications que nous visons (typiquement un avion d'arme avec tous ses détails de surfaces) sont composées de parties très différentes (train d'atterrissage, entrée d'air,...) nécessitant chacune un traitement particulier. Pour faire face à cette difficulté, nous développons un preconditionneur **multi-domaine** et **multi-méthode** selon une technique dite BDM (*Body Decomposition Method*).

## II. LE PRECONDITIONNEUR BDM

Dans le cas de l'équation intégrale du champ électrique (*Electrical Field Integral Equation* ou EFIE) la matrice à inverser s'interprète physiquement comme un opérateur d'impédance  $Z : \mathbf{n} \times \mathbf{H} \mapsto \mathbf{E}|_{\text{tan}}$  reliant une injection de courant électrique surfacique à la tension créée en réaction. Le preconditionneur optimal correspond donc à l'opérateur d'admittance  $Y$ . Évidemment, dans la pratique, cet opérateur n'est pas accessible et nécessite d'être approché par un opérateur  $\tilde{Y}$ . Pour ce faire, on s'inspire d'une technique ayant fait ses preuves dans la conception d'équations intrinsèquement bien conditionnées de type GCSIE [1]. Afin de construire un  $\tilde{Y}$  capable de profiter au mieux des particularités géométriques de l'objet diffractant, on utilise une partition quadratique de l'unité permettant d'éclater l'objet diffractant en différentes composantes (appelées corps ou *body*) sur chacune desquelles une technique adaptée d'approximation de  $\tilde{Y}$  est mise en place. En pratique, on se donne un recouvrement de l'objet diffractant

par plusieurs sous-surfaces, et sur lesquelles une paramétrix (au sens faible) de  $Z$  est accessible par des moyens analytiques ou numériques. La surface initiale  $\Gamma$  est donc décomposée en  $N$  corps  $\Gamma_n$  ( $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$ ) et d'un voisinage  $\Gamma_s$  de  $\bigcup \partial \Gamma_n$  appelé squelette de  $\Gamma$  auxquels sont associés une partition quadratique de l'unité  $\{(\Gamma_n, \chi_n)\}_{1 \leq n \leq N} \cup \{(\Gamma_s, \chi_s)\}$ . On se donne également des cartes  $\psi_n : \Gamma_n \rightarrow \Gamma_n$  associant chaque corps  $\Gamma_n$  à une géométrie  $\tilde{\Gamma}_n$  adaptée à une technique d'approximation de  $Y$ .

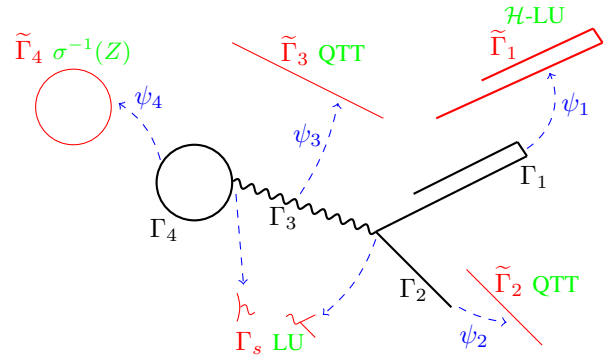


FIGURE 1. Exemple de décomposition en corps (rouges) opérée par le preconditionneur BDM. Les preconditionneurs locaux sont renseignés en vert.

L'approximation de  $Y$  sur la géométrie initiale est réalisée grâce à une technique de recollement des admittances des corps selon cette formule :

$$\tilde{Y} = \chi_s Y_s \chi_s + \sum_n \chi_n \psi_{n*}^{-1} \tilde{Y}_n \psi_{n*} \chi_n \quad (1)$$

où les  $\tilde{Y}_n$  et  $Y_s$  sont des approximations des admittances des corps  $\tilde{\Gamma}_n$  et du squelette  $\Gamma_s$  obtenues par des méthodes dédiées (les  $\psi_{n*}$  sont les opérateurs fonctionnels induits canoniquement par les  $\psi_n$ ). La Fig.1 illustre la mise en œuvre du preconditionneur BDM à l'aide de diverses techniques de preconditionnement locales (en vert) :

- $\sigma^{-1}(Z)$  désigne une famille de méthodes consistant à construire un preconditionneur par inversion symbolique, c'est à dire en cherchant un opérateur  $Y$  dont le symbole principal  $\sigma(Y)$  est l'inverse de  $\sigma(Z)$ , symbole principal de l'équation à résoudre. Les techniques à disposition pour réaliser ce programme sont désormais bien connues et ont fait l'objet de nombreuses études (cf. par ex. l'article de synthèse [1])

- QTT (*Quantized Tensor Train*) est une méthode développée par Baray [3]. Le préconditionneur est donné par la convolution de solutions élémentaires ("courants élémentaires") comprimées au format tensoriel QTT.
- $\mathcal{H}$ -matrix correspond à une méthode reposant sur une décomposition LU de l'opérateur  $Z$  au format  $\mathcal{H}$ -matrix.

Enfin on notera le rôle particulier tenu par le corps squelette  $\Gamma_s$ . Il regroupe l'ensemble des jonctions entre les corps  $\Gamma_n$ , garantissant ainsi la possibilité d'utiliser des préconditionneurs locaux à chaque corps sans altérer le préconditionnement global.

### III. TRAVAIL EN COURS

La thèse de Baray a permis d'implémenter un préconditionneur BDM dont la synthèse des  $\tilde{Y}_n$  (1) est donnée par un algorithme de compression tensorielle QTT. Appliqué à l'EFIE sur une géométrie localement tensorisable (cf. Fig.2), ce préconditionneur se révèle efficace en même temps que stable avec la montée en fréquence (cf. Fig.3). Il permet par exemple de diviser environ par 3 le temps de résolution du solveur de production de l'ONERA.

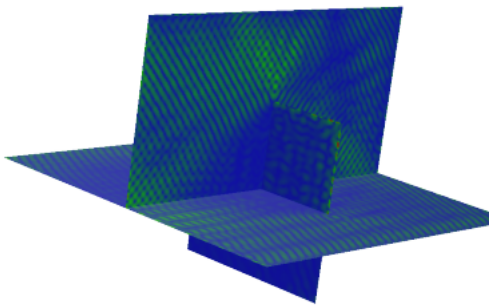


FIGURE 2. Intersection de trois plaques

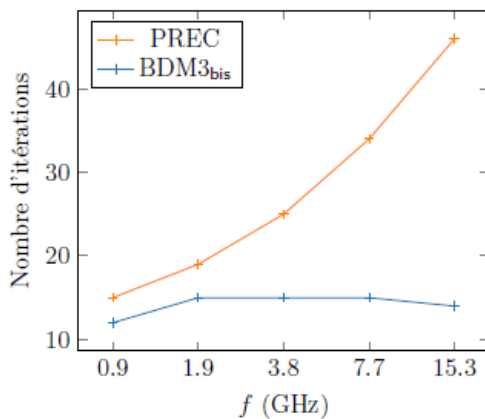


FIGURE 3. Performance du préconditionneur BDM comparé au préconditionneur PREC utilisé en production à l'ONERA

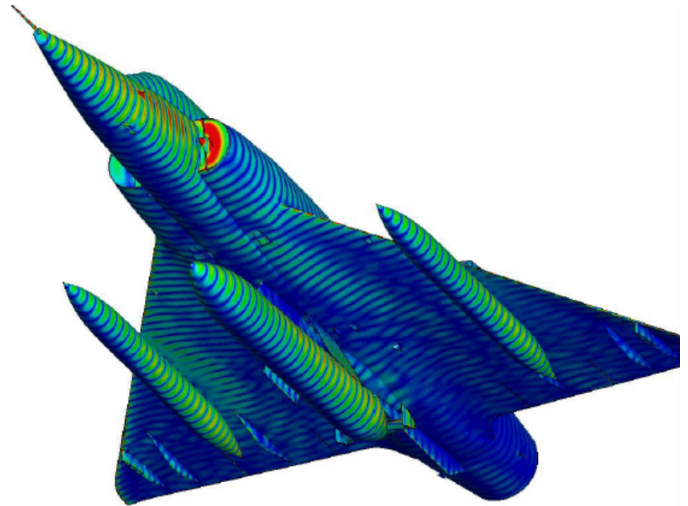


FIGURE 4. Courants électriques sur un avion d'arme

Ces bonnes performances justifient donc de chercher à enrichir l'approche BDM en y intégrant d'autres techniques de préconditionnement. Dans cette perspective, l'algorithme  $\mathcal{H}$ -matrix [4] apparaît comme la solution naturelle au traitement d'un objet complexe renfermant une cavité profonde (par ex. un avion d'arme avec son entrée d'air moteur Fig.4) dont il est bien connue qu'elle entraîne un très mauvais conditionnement. Une bibliothèque  $\mathcal{H}$ -matrix est donc actuellement en cours de développement avec pour premier objectif de traiter plus efficacement que ne le ferait une approche générale, des cas spécifiques tels par exemples des plaques, des cylindres ou des géométries évolutives selon un axe (comme par ex. la manche à air d'un avion d'arme).

Lors de la présentation orale, nous exposerons l'état d'avancement de ce programme de recherche en espérant pouvoir produire quelques premiers résultats de préconditionnement BDM mixant algorithmes QTT,  $\mathcal{H}$ -matrix et inversion symbolique.

### RÉFÉRENCES

- [1] D. Levadoux, "Stable integral equations for the iterative solution of electromagnetic scattering problems", dans *Comptes Rendus Physique*, vol. 7, pp. 518-532, 2006.
- [2] S. Borel, "Etude d'une équation intégrale stabilisée pour la résolution itérative de problèmes de diffraction d'ondes harmoniques en électromagnétisme", Thèse de doctorat, Université Paris XI (2006), pp. 35-53
- [3] M. Baray, "Approche tensorielle pour la résolution des équations intégrales en acoustique et en électromagnétisme", Thèse de doctorat, Université de Toulouse (2023), pp. 91-120
- [4] B. Lizé, "Résolution directe rapide pour les éléments finis de frontière en électromagnétisme et acoustique :  $\mathcal{H}$ -matrices. Parallélisme et applications industrielles", Thèse de doctorat, Université Paris-Nord - Paris XIII (2014).