

# Un couplage FEM-BEM multiphysique pour la modélisation de structures composites à effets magnétoélectriques

A. Urdaneta-Calzadilla, N. Galopin, I. Niyonzima, O. Chadebec, G. Meunier, B. Bannwarth  
Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP, G2Elab, F-38000 Grenoble, France

Email : nicolas.galopin@univ-grenoble-alpes.fr

**Résumé**—Une modélisation des effets magnétoélectriques dans des structures composites hétérogènes magnétostrictive-piézoélectrique est proposée. Afin de ne considérer explicitement que les matériaux actifs, un couplage entre la méthode des éléments finis et la méthode des éléments de frontière est développé où une formulation mixte du problème magnétique est considérée. Les lois de comportement de la phase magnétostrictive sont dérivées d’une formulation en invariants scalaires de l’énergie libre de Helmholtz. Le problème couplé est résolu par un algorithme itératif adaptatif de problèmes mono-physiques. Dans ce cadre, une modélisation d’un dispositif magnétoélectrique rotatif sans bobine est réalisée.

## I. INTRODUCTION

Les composites magnétoélectriques (ME) permettent d’obtenir une interaction électromagnétique. Ces matériaux sont basés sur des échanges mécaniques par la combinaison de matériaux piézoélectriques et magnétostrictifs qui ont, respectivement, de forts couplages électro-mécanique et magnéto-mécanique. Leur modélisation implique la résolution d’un problème électro-magnéto-mécanique, qui numériquement est généralement réalisée dans le cadre de la méthode des éléments finis (FEM) [1], [2]. Ces approches doivent considérer explicitement un domaine d’espace vide, ce qui implique un nombre important de degrés de liberté en dehors des domaines actifs, relativement à la quantité de matériaux actifs et à leur distance aux sources. Pour lever ce problème, on propose de mettre en œuvre un couplage entre la FEM et la méthode des éléments de frontière (BEM). Associé à des lois de comportement couplées et non-linéaires des matériaux actifs, le système algébrique qui en résulte est résolu par un solveur adaptatif Gauss-Seidel par bloc.

## II. LOIS CONSTITUTIVES

Le comportement de la phase piézoélectrique est décrit par les deux relations linéaires couplées suivantes (1) :

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(\mathbf{s}, \mathbf{e}) &= \mathbf{C}^e : \mathbf{s} - \mathbf{t}^e \cdot \mathbf{e}, \\ \mathbf{d}(\mathbf{s}, \mathbf{e}) &= \mathbf{e} : \mathbf{s} + \boldsymbol{\varepsilon}^s \cdot \mathbf{e}, \end{aligned} \quad (1)$$

avec  $\mathbf{d}$  le champ d’induction électrique,  $\mathbf{e}$  le champ électrique,  $\mathbf{t}$  le tenseur de contraintes de Cauchy,  $\mathbf{s}$  le tenseur des déformations linéaires,  $\mathbf{C}^e$  le tenseur d’élasticité à champ électrique constant,  $\mathbf{e}$  le tenseur piézoélectrique et  $\boldsymbol{\varepsilon}^s$  le tenseur des permittivités à déformations constantes. “ $\cdot$ ”, “ $:$ ” et  $\mathbf{t}^e$  désignent, respectivement, le produit contracté, le double produit contracté et l’opérateur de transposition.

Dans la phase magnétostrictive, l’énergie libre de Helmholtz  $\psi$  peut être exprimée, dans le cas de matériaux isotropes, par une relation polynomiale de ses invariants  $I_i$  [3] :

$$\psi = \frac{1}{2} \lambda I_1^2 + \mu I_2 + \sum_{i=1}^{n_\alpha} \alpha_i I_4^i + \sum_{i=1}^{n_\beta} \beta_i I_5^i + \sum_{i=1}^{n_\gamma} \gamma_i I_6^i, \quad (2)$$

où :

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr}(\mathbf{s}), \quad I_2 = \text{tr}(\mathbf{s}^2), \quad I_4 = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \\ I_5 &= \mathbf{b} \cdot \tilde{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{b}, \quad I_6 = \mathbf{b} \cdot \tilde{\mathbf{s}}^2 \cdot \mathbf{b}, \end{aligned} \quad (3)$$

avec  $\mathbf{b}$  le champ d’induction magnétique,  $\mathbf{h}$  le champ magnétique,  $\tilde{\mathbf{s}}$  le tenseur déviatorique du tenseur de déformation  $\mathbf{s}$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  les coefficients de Lamé du matériau,  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  et  $\gamma_i$  un ensemble fini de coefficients scalaires. Les relations constitutives non-linéaires couplées magnétique et mécanique sont alors obtenues par une différenciation analytique de l’énergie  $\psi$  :

$$\mathbf{t}(\mathbf{b}, \mathbf{s}) = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{s}}, \quad \mathbf{h}(\mathbf{b}, \mathbf{s}) = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{b}}. \quad (4)$$

## III. FORMULATION ET RESOLUTION

Les problèmes électriques et mécaniques sont limités au domaine actif  $\Omega_m$ . En effet, en raison de la forte permittivité des matériaux piézoélectriques et puisque les électrodes sont en contact direct avec les matériaux piézoélectriques, le champ de déplacement électrique est canalisé à l’intérieur des matériaux. Par conséquent, cette limitation est une approximation raisonnable. En considérant le régime statique, à partir de la relation de Maxwell-Gauss, de (1) et de conditions aux limites appropriées, la formulation faible du problème électrique en terme de potentiel scalaire électrique ( $\mathbf{e} = -\nabla \varphi$ ) s’écrit, trouver  $\varphi$  tel que :

$$\int_{\Omega_m} \nabla \delta \varphi \cdot \mathbf{d}(\mathbf{s}, \mathbf{e}) \, d\Omega - \int_{\partial \Omega_m} \delta \varphi \, \mathbf{d} \cdot \mathbf{n} \, d\partial \Omega = 0 \quad \forall \delta \varphi, \quad (5)$$

avec  $\mathbf{n}$  la normale sortante à  $\partial \Omega_m$  et  $\delta \varphi$  un champ scalaire virtuel approprié. A partir de (1), (4) et de l’équilibre de la quantité de mouvement linéaire, la forme faible mécanique en termes de déplacement mécanique  $\mathbf{u}$  s’écrit, trouver  $\mathbf{u}$  tel que :

$$\int_{\Omega_m} \nabla^S \delta \mathbf{u} : \mathbf{t}(\mathbf{s}, \mathbf{e}, \mathbf{b}) \, d\Omega - \int_{\partial \Omega_m} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}^t \, d\partial \Omega = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}, \quad (6)$$

où  $\nabla^S \mathbf{u} = \text{sym}(\nabla \mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + {}^t(\nabla \mathbf{u}))$ ,  $\mathbf{f}^t = \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}$  la densité de force surfacique et  $\delta \mathbf{u}$  un champ vectoriel virtuel approprié.

Comme dans [4], la forme faible du problème magnétique est obtenue à partir de l'équation de Maxwell-Ampère et de (4). Elle s'écrit en conservant le terme de frontière, trouver  $(\mathbf{a}, \phi_{red})$  tel que :

$$\int_{\Omega_m} \nabla \times \delta \mathbf{a} \cdot \mathbf{h}(\mathbf{b}, \mathbf{d}) d\Omega + \int_{\partial\Omega_m} \nabla \times \delta \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \phi_{red} d\partial\Omega = \int_{\partial\Omega_m} (\delta \mathbf{a} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{h}_0 d\partial\Omega \quad \forall \delta \mathbf{a}, \quad (7)$$

avec  $\mathbf{a}$  le potentiel vecteur magnétique ( $\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{a}$ ),  $\delta \mathbf{a}$  un champ vectoriel virtuel approprié,  $\phi_{red}$  le potentiel scalaire magnétique réduit,  $\mathbf{h}_0$  le champ magnétique créé par les sources externes au domaine  $\Omega_m$  et calculé par la loi de Biot-Savart. Le comportement du champ magnétique à la frontière  $\partial\Omega_m$  est pris en compte via la troisième identité de Green appliqué à  $\phi_{red}$  (puisque  $\Delta\phi_{red} = 0$  dans  $\Omega_0$ , le domaine libre). La formulation faible associée s'écrit, trouver  $\phi_{red}$  tel que :

$$\int_{\partial\Omega_m} \delta\phi \int_{\partial\Omega_m} \phi_{red} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} d\partial\Omega_m d\partial\Omega_m - \int_{\partial\Omega_m} \delta\phi c \phi_{red} d\partial\Omega_m + \int_{\partial\Omega_m} \delta\phi \int_{\partial\Omega_m} G \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}}{\mu_0} d\partial\Omega_m d\partial\Omega_m = \int_{\partial\Omega_m} \delta\phi \int_{\partial\Omega_m} G \mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{n} d\partial\Omega_m d\partial\Omega_m \quad \forall \delta\phi, \quad (8)$$

avec  $G$  le noyau de Green et  $\delta\phi$  un champ scalaire virtuel approprié. Les conditions de continuité à travers  $\partial\Omega_m$ ,  $[\mathbf{h} \times \mathbf{n}]_{\partial\Omega_m} = 0$  et  $[\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}]_{\partial\Omega_m} = 0$  sont satisfaites en considérant que  $b_n$  et  $\phi_{red}$  sont continus à travers  $\partial\Omega_m$ . Le couplage de (7) et (8) respecte donc les contraintes physiques des champs à travers  $\partial\Omega_m$ .

La discrétisation des potentiels,  $\varphi$  et  $\mathbf{u}$  dans  $H_{grad}$ ,  $\mathbf{a}$  dans  $\mathbf{H}_{curl}$ ,  $\phi_{red}$  et  $\phi$  par des éléments surfaciques d'ordre 0, conduit à un système algébrique avec une matrice définie par blocs et composée de blocs pleins (matrices BEM) et de blocs creux (matrices FEM). La résolution est effectuée via un schéma de Gauss-Seidel par blocs avec l'utilisation d'un algorithme adaptatif. Cela conduit à une résolution itérative de problème mono-physique dont la priorité est adressée au problème ayant la plus mauvaise convergence.

#### IV. DISPOSITIF ME ROTATIF SANS BOBINE

Pour illustrer l'approche proposée, on considère un dispositif ME rotatif sans bobine (Fig. 1). Le dispositif est composé d'une couche d'un matériau piézoélectrique (PZT-5A) et d'une couche d'un matériau magnétostrictif (Galfenol) en forme de disque. Quatre électrodes (notées  $e_1, e_2, e_3$  et  $e_4$ ) sont disposées sur la couche piézoélectrique. Ce composite ME est soumis au champ magnétique d'un aimant permanent (NdFeB), libre en rotation autour de l'axe du disque magnétostrictif (on note  $\hat{\theta}$  l'angle associé à la direction de la polarisation dans le plan  $xy$  (Fig. 1)).

La rotation de l'aimant contrôle la direction de l'aimantation dans la couche magnétostrictive et en conséquence les déformations du composite ME (Fig. 2). Cela entraîne l'apparition d'une différence de potentiel électrique entre les électrodes, qui dépend de l'angle de rotation (Fig. 3).

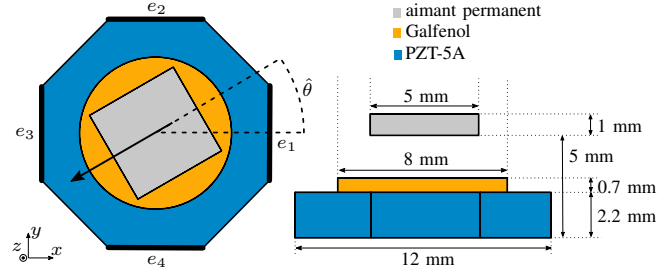


FIGURE 1. Dispositif d'essai, la flèche indique la direction de polarisation de l'aimant permanent,  $e_1, e_2, e_3$  et  $e_4$  désignent les électrodes.

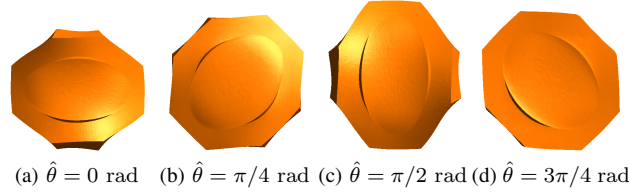


FIGURE 2. Déformations du composite ME (amplification des déplacements  $\times 10^5$ ) pour les angles  $\hat{\theta} = 0, \pi/4, \pi/2$  &  $3\pi/4$  rad, vue de dessus

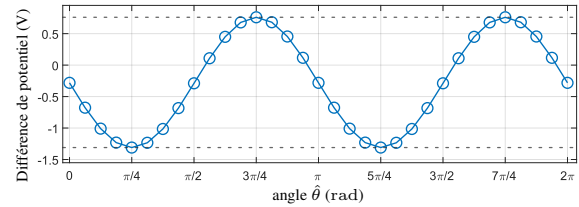


FIGURE 3. Différence de potentiels entre les électrodes de référence,  $e_1$  et  $e_2$ , et les électrodes de potentiels flottants,  $e_3$  et  $e_4$ , en fonction de l'angle  $\hat{\theta}$  entre l'aimant et le composite ME.

#### V. CONCLUSION

Nous avons présenté une stratégie de couplage FEM-BEM pour la résolution de problèmes multiphysiques induits par la modélisation des composites ME. Une description du comportement magnéto-mécanique basée sur l'utilisation des invariants de l'énergie libre de Helmholtz est utilisée. Le problème complet est résolu par un algorithme itératif adaptatif des trois problèmes mono-physiques pour améliorer la convergence. L'approche a été testée avec succès sur la modélisation d'un dispositif ME rotatif sans bobine.

#### RÉFÉRENCES

- [1] T. T. Nguyen, F. Bouillault, L. Daniel, X. Miningier, "Finite element modeling of magnetic field sensors based on nonlinear magnetoelectric effect," *J. Appl. Phys.*, vol. 109, no. 8, Apr. 2011, Art. no. 084904.
- [2] H. Talleb, Z. Ren, "Finite element modeling of magnetoelectric laminate composites in considering nonlinear and load effects for energy harvesting," *J. Alloys Comp.*, vol. 615, pp. 65-74, 2014.
- [3] U. Ahmed, U. Aydin, L. Daniel, P. Rasilo, "3-D Magneto-Mechanical Finite Element Analysis of Galfenol-Based Energy Harvester Using an Equivalent Stress Model", *IEEE Transactions on Magnetics*, 57(2), 1-5, 2020.
- [4] A. Urdaneta-Calzadilla, O. Chadebec, N. Galopin, I. Niyonzima, G. Meunier and B. Bannwarth, "Modeling of Magnetoelectric Effects in Composite Structures by FEM-BEM Coupling," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 59, no. 5, pp. 1-4, May 2023, Art. no. 7000604.