

Nouveaux développements sur l'estimation d'erreur a posteriori en quantité d'intérêt dans le calcul des champs électromagnétiques à basse fréquence

Zuqi Tang¹, Emmanuel Creusé² and Serge Nicaise²

¹Univ. Lille, Arts et Metiers Institute of Technology, Centrale Lille, Junia
ULR2697-L2EP, F-59000 Lille, France

Email : zuqi.tang@univ-lille.fr

²Univ. Polytechnique Hauts-de-France, INSA Hauts-de-France

CERAMATHS - Laboratoire de Matériaux Céramiques et de Mathématiques, F-59313 Valenciennes, France

Email : emmanuel.creuse@uphf.fr ; serge.nicaise@uphf.fr

Résumé—Dans ce travail, nous mettons en avant nos développements récents concernant l'estimation d'erreur a posteriori dans le calcul des champs électromagnétiques par la méthode des éléments finis, typiquement en basse fréquence, donc sur les modèles de la magnéto-statique et de la magnéto-dynamique. L'accent sera particulièrement mis sur les quantités d'intérêt, telles que les flux magnétiques, la précision étant essentielle pour certaines applications spécifiques, telles que le contrôle non destructif par le courant de Foucault.

I. INFORMATIONS GÉNÉRALES

L'application du contrôle non destructif basé sur les courants de Foucault est répandue pour l'inspection des matériaux conducteurs électriques en raison de sa facilité de mise en œuvre, de sa précision et de sa rapidité par rapport à d'autres méthodes de contrôle non destructif. Cependant, établir une corrélation directe entre la signature obtenue à partir du capteur de contrôle et la présence de défauts reste une tâche complexe. Par conséquent, les simulations numériques deviennent essentielles pour déterminer la relation entre la forme du défaut et sa signature [1]. Typiquement, la méthode des éléments finis est utilisée pour simuler le comportement des courants de Foucault en présence de défauts. En variant les paramètres du défaut tels que le type, l'emplacement et la taille, ainsi que les informations capturées par le capteur (appelées quantités d'intérêt, *quantity of interest*, notée par QOI), une signature de défaut unique est attendue. L'exécution du modèle dans diverses conditions facilite la construction d'une base de données complète associant chaque signature de sortie du capteur à des caractéristiques de défaut spécifiques.

Malgré les critiques concernant son coût de calcul, notamment en termes de temps de calcul, la simulation par éléments finis suscite un intérêt croissant dans l'industrie. Cette montée d'intérêt peut être attribuée à l'expansion continue des ressources informatiques disponibles et à l'amélioration de la capacité de calcul, ce qui contribue à l'efficacité accrue des simulations par éléments finis. Un autre facteur qui renforce la popularité de la simulation par éléments finis est sa praticité pour traiter différentes formes de défauts, un défi qui s'avère extrêmement difficile pour les méthodes de mesure traditionnelles.

Notre travail vise à résoudre un problème majeur qui se pose dans la simulation par éléments finis : la précision de la solution. En général, il est connu que la qualité du maillage

influence significativement la qualité de la solution. Divers efforts ont été déployés pour estimer l'erreur de la solution de différentes manières depuis les années 1980 afin de guider le processus de raffinement du maillage. Typiquement, il est nécessaire d'établir une relation entre l'erreur ε et l'estimateur η :

$$C_1\eta \leq \varepsilon \leq C_2\eta \quad (1)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes. Pour une exploration plus approfondie de la littérature, nous renvoyons à notre travail précédent [2].

Cependant, les travaux existants sur ce sujet, particulièrement dans le domaine de calcul des champs électromagnétiques, mettent l'accent sur l'erreur dans un sens énergétique global, ce qui est inhérent puisque la méthode des éléments finis vise à trouver une solution en minimisant la norme énergétique. Au contraire, la quantité d'intérêt requise dans notre application est définie dans des sens locaux au sein de zones spécifiques, telles que le flux magnétique.

Contrairement à l'estimation d'erreur classique, pour un contrôle de l'erreur, les deux constantes C_1 , C_2 , et η dans (1) doivent être entièrement calculables. Inspirés par l'idée introduite dans [3] pour le problème de Laplace, des travaux d'investigation et de développement initiaux pour l'estimateur de la quantité d'intérêt dans les problèmes magnéto-statiques ont été rapportés dans [4]. Récemment, nous avons mené une analyse mathématique approfondie, en nous concentrant initialement sur le problème magnéto-statique [5] et en étendant rapidement nos résultats pour aborder les problèmes de courants de Foucault dans ce contexte [6]. Dans ce travail, nous visons à interpréter les résultats de manière plus pratique et à démontrer leur efficacité à travers des exemples numériques.

II. INFORMATIONS TECHNIQUES

Sans perdre de généralité, nous considérons directement le cas de la magnéto-dynamique ici. La formulation du potentiel harmonique $\mathbf{A} - \varphi$ s'écrit sous la forme :

$$\text{rot}(\mu^{-1}\text{rot}\mathbf{A}) + \sigma(j\omega\mathbf{A} + \nabla\varphi) = \mathbf{J}_s, \quad (2a)$$

$$\text{div}(\sigma(j\omega\mathbf{A} + \nabla\varphi)) = 0, \quad (2b)$$

où \mathbf{J}_s est le terme source à divergence nulle, μ et σ représentent respectivement la perméabilité magnétique et la

conductivité électrique. j est le nombre imaginaire unitaire, et ω représente la pulsation.

Si l'on s'intéresse à la quantité d'intérêt, telle que le flux magnétique capturé par le capteur, cela peut être exprimé à travers une intégrale de volume comme suit :

$$\Phi = \int_{D_{\text{QOI}}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{N} \, dD_{\text{QOI}}. \quad (3)$$

Le sous-domaine D_{QOI} peut être choisi comme le volume de la bobine (\mathbf{N} représente le vecteur normalisé de \mathbf{J}_s).

Contrairement à l'estimateur d'erreur classique, qui consiste à évaluer l'erreur entre la solution exacte \mathbf{A} et la solution numérique \mathbf{A}_h définie par

$$\varepsilon_{\text{classique}} = \int_D \frac{1}{\mu} |\text{rot}(\mathbf{A} - \mathbf{A}_h)|^2 \, dD \quad (4)$$

interprétée comme l'erreur dans la norme énergétique magnétique globale, l'erreur en quantité d'intérêt, est définie par

$$\varepsilon_{\text{QOI}} = \int_{D_{\text{QOI}}} (\mathbf{A} - \mathbf{A}_h) \cdot \mathbf{N} \, dD_{\text{QOI}}. \quad (5)$$

Il est évident que les deux erreurs mentionnées ici sont différentes, ce qui indique que leurs estimateurs respectifs ne peuvent pas être facilement utilisés de manière interchangeable. L'estimation d'erreur en quantité d'intérêt satisfait la relation suivante [6] :

$$\varepsilon_{\text{QOI}} = \eta_{\text{QOI}} + \mathcal{R}. \quad (6)$$

Ici, η_{QOI} représente l'estimateur d'erreur associé à la quantité d'intérêt et \mathcal{R} désigne le terme reste.

Pour calculer le terme η_{QOI} , divers choix peuvent être faits ; une approche possible est illustrée comme suit (compte tenu du fait que la reconstruction du flux équilibré peut être naturellement obtenue en calculant les deux formulations duales dans les problèmes de la magnétodynamique) :

- 1) Obtenir \mathbf{E}_h et \mathbf{B}_h directement en calculant $\mathbf{E}_h = j\omega\mathbf{A}_h + \nabla\varphi_h$ et $\mathbf{B}_h = \text{rot}\mathbf{A}_h$.
- 2) Calculer \mathbf{H}_h et \mathbf{J}_h en utilisant la formulation duale.
- 3) Calculer \mathbf{A}_h^* , \mathbf{E}_h^* et \mathbf{B}_h^* en résolvant le problème adjoint de (2a)–(2b).
- 4) Déterminer \mathbf{H}_h^* et \mathbf{J}_h^* en calculant la formulation duale du problème adjoint de (2a)–(2b).

Il convient de noter ici que l'estimateur d'erreur équilibré classique pour l'erreur classique définie dans (4) du problème direct (2a)–(2b) peut être obtenu comme suit :

$$\eta_{\text{direct}} = \|\sigma\mathbf{E}_h - \mathbf{J}_h\|_{\text{PJ}} + \|\mathbf{B}_h - \mu\mathbf{H}_h\|_{\text{EM}}. \quad (7)$$

Ici, la notation $\|\cdot\|_{\text{EM}}$ (ou $\|\cdot\|_{\text{PJ}}$) représente la norme dans le sens de l'énergie magnétique globale (ou de la perte Joule).

De même, pour le problème adjoint, l'estimateur d'erreur équilibré peut être exprimé comme suit :

$$\eta_{\text{adjoint}} = \|\sigma\mathbf{E}_h^* - \mathbf{J}_h^*\|_{\text{PJ}} + \|\mathbf{B}_h^* - \mu\mathbf{H}_h^*\|_{\text{EM}}. \quad (8)$$

L'estimateur pour la quantité d'intérêt, η_{QOI} , est défini comme :

$$\begin{aligned} \eta_{\text{QOI}} = & \int_D \mathbf{A}_h^* \cdot (\overline{\mathbf{J}_s + \mathbf{J}_h - \text{rot}\mathbf{H}_h}) \, dD \\ & + \frac{j}{\omega} \int_D \frac{1}{\sigma} \mathbf{J}_h^* \cdot (\overline{\sigma\mathbf{E}_h - \mathbf{J}_h}) \, dD \\ & + \int_D \mathbf{H}_h^* \cdot (\overline{\mathbf{B}_h - \mu\mathbf{H}_h}) \, dD. \end{aligned} \quad (9)$$

Enfin, il a été démontré récemment dans [6] que le terme reste \mathcal{R} est explicitement borné par $6\eta_{\text{direct}}\eta_{\text{adjoint}}$. Par conséquent, la précision de la quantité d'intérêt dans (6) peut être évaluée en calculant η_{QOI} , η_{direct} et η_{adjoint} .

Un exemple académique impliquant une plaque conductrice avec un défaut et une bobine est présenté dans la Figure 1 pour mettre en valeur les premiers résultats. L'estimateur correspondant est calculé, et on peut observer que la valeur de l'estimateur diminue selon l'ordre de convergence attendu à mesure que le maillage est affiné. Dans la version longue, une discussion approfondie des performances des estimateurs sera menée.

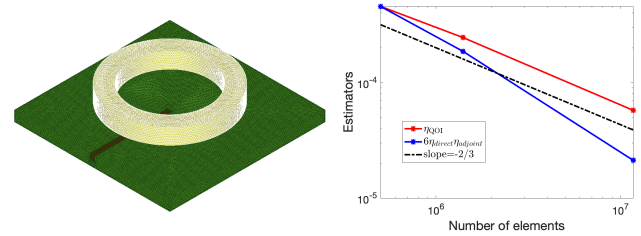


FIGURE 1. Modèle considéré : a) Maillage ; b) Convergence des estimateurs.

RÉFÉRENCES

- [1] L. Maurice, V. Costan, E. Guillot, P. Thomas, "Eddy current NDE performance demonstrations using simulation tools", AIP Conf. Proc. 1511, 464–471, 2013.
- [2] Z. Tang, Y. Le Menach, E. Creusé, S. Nicaise, F. Piriou and N. Nemitz, "Residual and equilibrated error estimators for magnetostatic problems solved by finite element method", IEEE Trans. Magn., vol. 49, no. 12, pp. 5715–5723, Dec. 2013.
- [3] I. Mozolevski and S. Prudhomme, "Goal-oriented error estimation based on equilibrated-flux reconstruction for finite element approximations of elliptic problems", Comput. Methods Appl. Mech. Eng., vol. 288, pp. 127–145, May 2015.
- [4] Z. Tang, S. Lou, A. Benabou, E. Creusé, S. Nicaise, J. Korecki and J-C. Mipo, "Guaranteed quantity of interest error estimate based on equilibrated flux reconstruction," in IEEE Transactions on Magnetics, vol. 57, no. 6, pp. 1–4, June 2021.
- [5] E. Creusé, S. Nicaise and Z. Tang, "Goal-oriented error estimation based on equilibrated flux and potential reconstruction for the approximation of elliptic and parabolic problems," Computers & Mathematics with Applications, Volume 146, 2023, Pages 323–338.
- [6] E. Creusé, S. Nicaise and Z. Tang, "Goal-oriented error estimation based on equilibrated flux reconstruction for the approximation of the harmonic formulations in eddy current problems," IMA Journal of Numerical Analysis, in press, 2023.