

Détermination d'un schéma électrique équivalent d'un transformateur à noyau toroïdal par la méthode CLN

W. Chen¹, T. Henneron¹, S. Clénet¹ et J. Zou²

¹Laboratoire d'Electrotechnique et d'Electronique de Puissance de Lille (L2EP), France

²Département d'ingénierie électrique, Université de Tsinghua, Chine

Email : wei.chen@ensam.eu

Résumé—La méthode dite de « Cauer ladder network » (CLN) permet de construire un modèle réduit d'un modèle éléments finis magnétodynamique, basé sur un circuit électrique équivalent. Le circuit équivalent peut être alors utilisé directement pour une étude dans le domaine temporel ou fréquentiel et également être directement couplé avec le circuit extérieur. La méthode CLN a été largement employée pour étudier des problèmes 2D mais peu en 3D. Dans cette communication, la méthode CLN est utilisée pour développer un modèle 3D réduit à partir de la formulation en potentiel A-T d'un transformateur monophasé à noyau toroïdal.

I. INTRODUCTION

La méthode de « Cauer ladder network » (CLN) proposée par Kameari et al [1] permet de construire un modèle réduit construit directement à partir d'un modèle éléments finis. Cette méthode construit un circuit électrique équivalent en « échelle » composé de résistances et d'inductances. Cette méthode permet également de construire des bases réduites conduisant à un calcul presque instantané de la répartition du champ électromagnétique une fois le circuit électrique résolu. Cette méthode a été largement utilisée pour étudier des problèmes 2D mais peu utilisée pour des problèmes réalistes 3D présentant plusieurs entrées de type "multi inputs / multi outputs" (MIMO).

Dans cette communication, nous appliquons la méthode CLN à la modélisation d'un transformateur monophasé à noyau toroïdal à partir d'un modèle éléments finis 3D. Nous adoptons une formulation basée sur les potentiels vecteurs \mathbf{A} et \mathbf{T} . La précision du modèle CLN est évaluée par un estimateur d'erreur.

II. MODÈLE CLN

Dans la suite, nous nous proposons de présenter le principe de la méthode CLN. Considérons un ensemble de M conducteurs, chacun alimenté par un courant $i_m(\omega)$, avec ω la pulsation électrique défini sur un domaine Ω . Dans le cas où l'on suppose que les matériaux ont un comportement linéaire, les équations de Maxwell pour le problème magnétodynamique (MQS) peuvent être exprimées dans le domaine fréquentiel :

$$\begin{cases} \text{rot } \frac{1}{\mu} \mathbf{B}(\omega, x) = \sum_{m=1}^M [i_k(\omega) \mathbf{J}_{s,k}(x) + \mathbf{J}_{ind,k}(\omega, x)] \\ \text{rot} \left(\frac{1}{\sigma} \sum_{k=1}^M [i_k(\omega) \mathbf{J}_{s,k}(x) + \mathbf{J}_{ind,k}(\omega, x)] \right) = -j\omega \mathbf{B}(\omega, x) \end{cases} \quad (1)$$

où μ représente la perméabilité, σ la conductivité, $\mathbf{J}_{s,k}$ la densité de courant en régime continu correspondant à un courant de 1A du conducteur k, $\mathbf{J}_{ind,k}$ la densité de courant induit de réaction (la densité de courant induit dans le conducteur k est

alors égale à la somme $\mathbf{J}(\omega, x) = \mathbf{J}_{ind,k}(\omega, x) + i(\omega) \mathbf{J}_{s,k}(x)$ et \mathbf{B} l'induction magnétique. Ces équations peuvent être simplifiées en utilisant les potentiels vectoriels \mathbf{A} et \mathbf{T} [2], comme suit $\mathbf{B}(\omega, x) = \text{rot } \mathbf{A}(\omega, x)$ et $\mathbf{J}(\omega, x) = \text{rot } \mathbf{T}(\omega, x)$.

Après application de la méthode des éléments finis (MEF), l'approche CLN peut être appliquée au système matriciel résultant. Cette méthode permet de construire un ensemble de matrices $\{R_{2k} | k \in [0, n], R_{2k} \in \mathbb{R}^{M,M}\}$ et $\{L_{2k-1} | k \in [1, n], L_{2k-1} \in \mathbb{R}^{M,M}\}$ dont les termes représentent des résistances et des inductances propres et mutuelles entre conducteurs, ainsi que les bases locales : $\{\mathbf{J}_{2k,m}(x) | k \in [0, n], m \in [1, M]\}$ et $\{\mathbf{B}_{2k-1,m}(x) | k \in [1, n], m \in [1, M]\}$. L'entier n représente le nombre d'étages du circuit équivalent.

Les champs sont approchés par :

$$\begin{cases} \mathbf{B}_{MEF}(\omega, x) \approx \mathbf{B}'(\omega, x) = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^M i_{2k-1,m} \mathbf{B}_{2k-1,m}(x) \\ \mathbf{J}_{MEF}(\omega, x) \approx \sum_{k=0}^n \sum_{m=1}^M v_{2k,m} \mathbf{J}_{2k,m}(x) \end{cases} \quad (2)$$

où les coefficients $i_{2n+1,k}$ et $v_{2n,k}$ correspondent respectivement aux courants et tensions associés aux éléments du circuit équivalent.

L'erreur d'approximation peut être évaluée à l'aide d'un estimateur d'erreur [3], exprimée par :

$$\begin{aligned} \epsilon_h^2 &= \left\| \sum_{m=1}^M i_{2n+1,m} \mathbf{B}_{2n+1,m} \right\|_{\mu}^2 \\ &= \|\mathbf{B}' - \mathbf{B}_{MEF}\|_{\mu}^2 + \|\mathbf{B}_{MEF} - \mathbf{B}''\|_{\mu}^2 \\ &\geq \|\mathbf{B}' - \mathbf{B}_{MEF}\|_{\mu}^2 \end{aligned} \quad (3)$$

où la norme énergétique $\|\mathbf{X}\|_{\mu}^2 = \int_{\Omega} \mathbf{X}^H \cdot \frac{1}{\mu} \mathbf{X}$ est utilisée, \mathbf{B}_{MEF} représente la solution du problème éléments finis, et \mathbf{B}'' est une solution construite à partir de la solution approchée $\mathbf{B}'(\omega, x)$ obtenue par la méthode CLN.

III. APPLICATION SUR UN INDUCTEUR À NOYAU TOROÏDAL

A. Application

Nous appliquons la méthode CLN à l'exemple d'un transformateur présenté sur la Fig. 2. La formulation $\mathbf{A-T}$ est appliquée à un maillage de 548000 éléments. Les conducteurs des deux bobinages sont en cuivre. Nous nous proposons dans la suite d'effectuer l'étude pour différentes valeurs de conductivité du noyau pour évaluer la méthode CLN. Nous étudions ainsi le cas où la conductivité est celle d'un matériau ferrite de type N30. Puis, nous considérons un second matériau, désigné

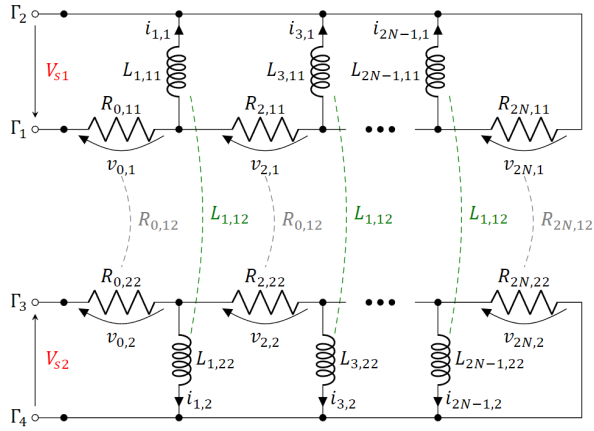


FIGURE 1. Causer ladder network en cas MIMO pour $M=2$.

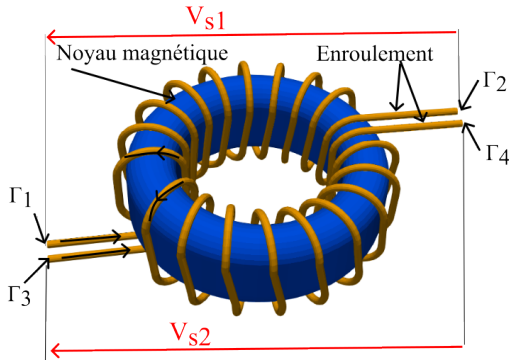


FIGURE 2. Géométrie du noyau magnétique, des enroulements du transformateur et localisation des surfaces équipotentielles $\Gamma_1, \dots, \Gamma_4$.

comme matériau 2, dont la conductivité est un million de fois supérieure à celle du N30, comme indiqué dans le Tableau I.

Le circuit équivalent généré par la méthode CLN comporte deux ports, comme le montre la Fig. 1. Pour comparer le modèle complet (MQS) avec celui de la méthode CLN, nous testons le fonctionnement en mode commun monophasé, caractérisé par une différence de potentiel de 1 V entre les connexions du bobinage primaire Γ_1 et Γ_2 et également entre Γ_3 et Γ_4 les connexions du bobinage secondaire.

TABLE I

CONDUCTIVITÉ ET PERMEABILITÉ DES DIFFÉRENTS MATÉRIAUX UTILISÉS.

	Conductivité	Permeabilité relative
cuivre	58.0 MS/m	1.0
N30	2 S/m	4300.0
matériau 2	2 MS/m	4300.0

B. Résultats

Nous étudions l'évolution des pertes Joule pour le matériau N30, calculées à l'aide du modèle éléments finis et du modèle

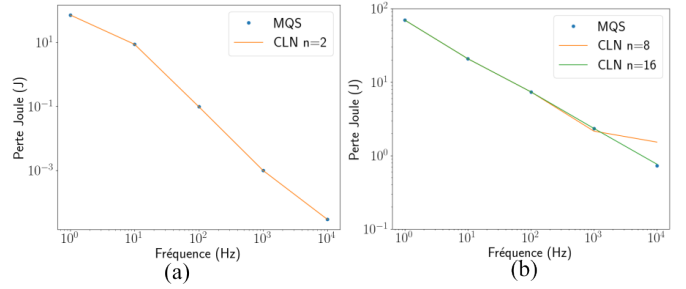


FIGURE 3. Evolution des pertes Joule en fonction de la fréquence données par : (a) le modèle éléments finis et par le modèle CLN avec pour $n = 2$ dans le cas du matériau N30 (b) le modèle CLN avec pour $n = 8$ et $n = 16$ dans le cas du matériau 2.

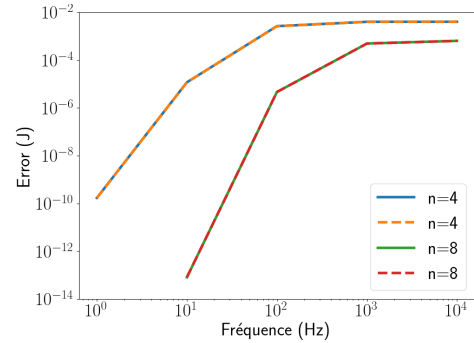


FIGURE 4. Evolution de l'estimateur d'erreur (ligne pointillée) ϵ_h^2 et terme $\|\mathbf{B}' - \mathbf{B}_{MEF}\|_{\mu}^2 + \|\mathbf{B}_{MEF} - \mathbf{B}''\|_{\mu}^2$ (ligne continue) en fonction de la fréquence par le modèle CLN avec différents nombres d'étages pour le tore avec le matériau 2.

CLN, en se limitant à $n = 2$, comme illustré dans la Fig. 3. Les résultats démontrent une excellente correspondance entre les deux résultats, y compris à des fréquences élevées atteignant 10 kHz. Cependant, lors de l'utilisation du matériau 2, caractérisé par une conductivité nettement supérieure, un nombre plus élevé d'étage pour le circuit équivalent est requis pour obtenir une concordance satisfaisante des pertes Joule entre les modèles éléments finis et CLN, comme le montre la Fig. 3. L'erreur du champ peut être efficacement contrôlée à l'aide de l'estimateur d'erreur comme illustré dans la Fig. 4. On vérifie bien la relation (3). On peut donc calculer la distance entre l'approximation donnée par la méthode CLN \mathbf{B}' et la solution éléments finis \mathbf{B}_{MEF} sans avoir besoin de déterminer cette dernière. On constate bien que si on accroît le nombre d'étages que l'erreur diminue et que le modèle réduit est très précis à basse fréquence et que sa précision se dégrade avec la montée en fréquence.

RÉFÉRENCES

- [1] A. Kameari, H. Ebrahimi. « Causer ladder network representation of eddy-current fields for model order reduction using finite-element method », IEEE Trans. Magn., vol. 54, no. 3, p. 1-4, 2018.
- [2] N. Köster, O. König, and O. Bíró, « Proper Generalized Decomposition With Causer Ladder Network Applied to Eddy Current Problems », IEEE Trans. Magn., vol. 57, no. 6, pp. 1-4, 2021.
- [3] Hiruma, Shingo, Stéphane Clénet, and Hajime Igarashi. « Error Estimator for Continued Fraction Approximation of Linear Dynamical System ». 2022 IEEE 20th Biennial Conference on Electromagnetic Field Computation (CEFC). IEEE, 2022.