

Amélioration de l'ordre d'approximation géométrique des éléments finis d'arêtes en équations intégrales de frontière pour le calcul précis de la surface équivalente radar

M. Baray, A. Pujols, E. Arcese and F. Collino
CEA CESTA, 33114 Le Barp, France

Email : matthias.baray@cea.fr

Résumé—Il est bien connu que les méthodes éléments finis d'ordre élevé offrent des gains significatifs en terme de précision et de temps de calcul. Cependant, à cause de certaines difficultés d'implémentation pour les équations intégrales surfaciques en électromagnétisme, l'intégration de ces méthodes dans les codes industriels est peu répandue. Nous présentons une approche plus simple, donnant de bons résultats, qui consiste à uniquement augmenter l'ordre d'approximation de la géométrie plutôt que celui de l'espace d'approximation de la méthode de Galerkin.

I. INTRODUCTION

La problématique générale de cette étude concerne le calcul haute précision de la Surface Équivalente Radar (SER) d'un objet parfaitement conducteur. Dans ce travail, la SER est calculée grâce à la résolution d'une équation intégrale de frontière : la CFIE (Combined Field Integral Equation) [1]. Il est usuel de la discrétiser par une méthode de Galerkin utilisant des fonctions de base de Raviart-Thomas (RT) de plus bas ordre [2] ainsi qu'une approximation de la géométrie diffractante par des triangles plats. Bien que ce schéma soit populaire, il conduit à un très grand nombre d'inconnues lorsqu'on souhaite obtenir une solution très précise. De plus, à cause de l'erreur d'approximation géométrique, les taux de convergence numérique de la SER ne sont pas en adéquation avec les estimations théoriques. Par exemple, d'après la théorie de l'approximation de l'EFIE (Electric Field Integral Equation), discrétisée en utilisant les espaces conformes $H(\text{div})$ de type RT de plus bas ordre sur des surfaces lisses, le taux de convergence de la SER devrait être en $\mathcal{O}(h^3)$ [3] (avec h le pas de maillage), alors que les expériences numériques montrent un taux inférieur, $\mathcal{O}(h^2)$ (cf. Fig. 1). Pour surmonter ces difficultés, plusieurs travaux ont été dédiés au développement de méthodes de Galerkin d'ordre élevé, c'est-à-dire des méthodes augmentant conjointement l'ordre d'approximation géométrique et l'ordre polynomial de l'espace éléments finis [4], [5], [6]. Bien que celles-ci offrent des gains significatifs en matière de précision, elles requièrent des efforts d'implémentation conséquents pour l'EFIE ou la CFIE.

Dans ce travail, nous proposons une approche plus simple réduisant l'erreur d'approximation géométrique. Elle consiste à approcher la surface diffractante à l'ordre 2 avec des triangles quadratiques tout en utilisant l'espace d'éléments finis RT de plus bas ordre. La plus grosse difficulté de cette approche réside dans le calcul de l'intégrale singulière de l'opérateur intégral magnétique. Pour surmonter cela, nous présentons deux techniques, l'une est inspirée de [7] et l'autre

utilise les propriétés des fonctions de base.

D'un point de vue pratique, notre méthode est relativement facile à implémenter et ne fait pas intervenir de gros changements au sein des codes industriels classiques. Nous montrerons que notre schéma est capable d'atteindre un meilleur taux de convergence et conduit à une réduction, pour une précision donnée sur la SER, du temps de calcul CPU et de la consommation de mémoire vive.

II. CADRE MATHÉMATIQUE ET MÉTHODE

A. Problème de diffraction électromagnétique

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un obstacle borné parfaitement conducteur de frontière Γ et \mathbf{n} sa normale unitaire extérieure. On suppose que Ω est un milieu homogène avec une permittivité électrique ϵ et une perméabilité magnétique μ constantes. Soient respectivement \mathcal{T} et \mathcal{K} les opérateurs intégraux électrique et magnétique définis par : $\forall \mathbf{x} \in \Gamma$

$$\mathcal{T}(\mathbf{J})(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{J}(\mathbf{y}) + \frac{1}{k^2} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y}) \quad (1)$$

$$\mathcal{K}(\mathbf{J})(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \nabla_{\mathbf{y}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \times \mathbf{J}(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y}) \quad (2)$$

avec $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ik\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}$ ($\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$) le noyau de Helmholtz et $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ le nombre d'onde (λ étant la longueur d'onde). Nous renvoyons le lecteur à [1] pour la formulation de l'EFIE et de la CFIE ainsi que pour leur discrétisation par une méthode de Galerkin.

B. Approximation de la géométrie et discrétisation

On approche Γ par une triangulation constituée de triangles quadratiques. Soit T un triangle plat défini par ses trois sommets $(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3)$. Le triangle quadratique \tilde{T} associé à T est donné par une application $\phi : T \rightarrow \tilde{T}$ qui est telle que :

$$\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \sum_{i=1}^3 \mathbf{w}_i \mu_i \mu_{i+1} \quad (3)$$

où μ_1, μ_2, μ_3 sont les coordonnées barycentriques de \mathbf{x} et $\mathbf{w}_i := 4 \left(\mathbf{P}_i - \frac{\mathbf{S}_{i+1} + \mathbf{S}_{i+2}}{2} \right)$ avec \mathbf{P}_i les projections des milieux des arêtes $[\mathbf{S}_{i+1}, \mathbf{S}_{i+2}]$ sur Γ et $i+1, i+2$ sont calculés modulo 3.

La discrétisation de l'EFIE et de la CFIE est donnée par une formulation variationnelle utilisant l'espace d'éléments

finis RT dont les fonctions de base courbes [2] sont définies par : $\forall i = 1, 2, 3$

$$\mathbf{J}_i(\mathbf{x}) = \frac{\mu_{i+1}d\phi(\mathbf{x})(\mathbf{S}_{i+1} - \mathbf{S}_i) + \mu_{i+2}d\phi(\mathbf{x})(\mathbf{S}_{i+2} - \mathbf{S}_i)}{J_\phi(\mathbf{x})} \quad (4)$$

avec $d\phi(\mathbf{x})$, $J_\phi(\mathbf{x})$ étant respectivement la différentielle et le jacobien de ϕ en \mathbf{x} .

C. Traitement des singularités

Les intégrales sur des éléments courbes nécessitent d'être calculées précisément. La singularité de l'opérateur \mathcal{T} est aisément éliminée en utilisant une méthode de Duffy [8]. Cependant, l'intégration numérique de la singularité de l'opérateur \mathcal{K} est plus complexe. Nous proposons deux stratégies pour répondre à cela. La première combine une soustraction de singularité avec une technique basée sur un changement de variables en coordonnées polaires [7] et la deuxième utilise les propriétés des fonctions de base.

III. RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Dans la suite, nous considérons l'équation EFIE et sa résolution est effectuée à l'aide d'un solveur dense direct exploitant un parallélisme en mémoire distribuée (bibliothèque MPI) et utilisant des processeurs AMD Milan @2.45 GHz.

Nous démontrons l'intérêt de notre stratégie en étudiant tout d'abord l'ordre de convergence de la SER monostatique, $(\theta, \phi) = (0^\circ, 0^\circ)$, d'une sphère parfaitement conductrice de rayon 1 m à une fréquence de 500 MHz. Les résultats sont présentés dans la Fig. 1. Comme mentionné dans l'introduction, le taux de convergence de la SER pour des triangles plats est égal à 2. L'étude numérique montre que les triangles quadratiques permettent d'améliorer ce taux puisque nous obtenons un ordre de convergence égal à 2.6. Par ailleurs, remarquons que l'erreur pour le maillage le plus grossier est réduite de plus d'un facteur 10.

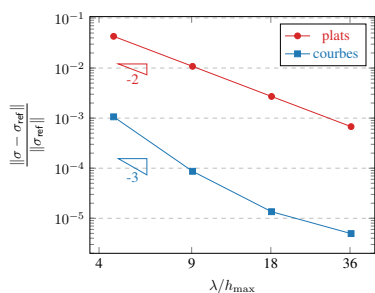


FIGURE 1 – Erreur de la SER monostatique sur une sphère de rayon 1 m à $f = 500$ MHz en polarisation HH.

Enfin, nous montrons les gains CPU réalisés avec des triangles quadratiques sur le cas test de l'amande NASA. Le champ électrique incident illuminant l'objet est une onde plane de fréquence 10.25 GHz en polarisation HH dont les incidences varient de $(90^\circ, 0^\circ)$ à $(90^\circ, 180^\circ)$ avec un pas de 0.5° . La solution de référence est calculée sur un maillage fin composé de 1 589 452 triangles plats ($\lambda/h = 120$). Pour obtenir une erreur relative en norme l^∞ de l'ordre de 10^{-3}

sur les deux polarisations (HH et VV), nous devons à minima utiliser un maillage de 181 920 triangles plats ($\lambda/h = 40$), soit 272 880 inconnues. Cependant, avec les triangles quadratiques nous avons besoin de seulement 46 358 éléments ($\lambda/h = 20$), soit 69 537 inconnues, ce qui permet de réduire le temps CPU total d'un facteur 30. Le détail des temps de calcul est donné dans le Tableau I et les SER sont affichées dans la Fig. 2.

TABLE I – Temps CPU (h-CPU) pour l'amande NASA.

Triangles	Assemblage	Factorisation	Résolution	Total
Plats	116.58	329.87	5.59	452.04
Quadratiques	8.95	5.64	0.35	14.94

La présentation évaluera les gains obtenus avec les triangles quadratiques pour la CFIE sur d'autres cas tests de complexité géométrique plus importante. Nous verrons comment ils affectent la compression hiérarchique, de type \mathcal{H} -matrix, des matrices et donnerons de plus amples détails sur le calcul des intégrales singulières.

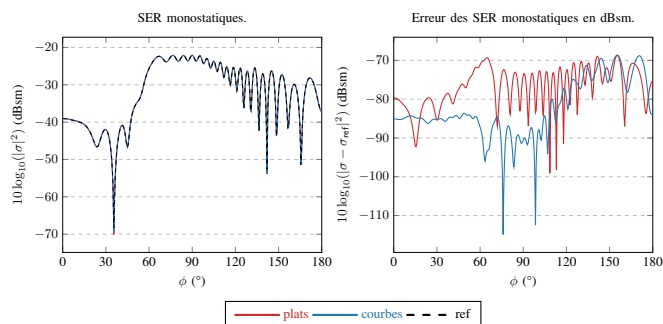


FIGURE 2 – Résultats pour le cas test de l'amande NASA à $f = 10.25$ GHz en polarisation VV.

RÉFÉRENCES

- [1] P. Ylä-Oijala, M. Taskinen, and S. Järvenpää, "Analysis of surface integral equations in electromagnetic scattering and radiation problems," *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 32, no. 3, pp. 196–209, 2008.
- [2] P. A. Raviart and J. M. Thomas, "A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems," in *Mathematical Aspects of Finite Element Methods*. Springer Berlin Heidelberg, 1977, vol. 606, pp. 292–315.
- [3] S. H. Christiansen, "Discrete Fredholm properties and convergence estimates for the electric field integral equation," *Mathematics of Computation*, vol. 73, no. 245, pp. 143–167, Jul. 2003.
- [4] R. Graglia, D. Wilton, and A. Peterson, "Higher order interpolatory vector bases for computational electromagnetics," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 45, no. 3, pp. 329–342, Mar. 1997.
- [5] E. Demaldent, D. P. Levadoux, and G. Cohen, "Spectral elements for the integral equations of time-harmonic maxwell problems," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 56, no. 9, pp. 3001–3010, 2008.
- [6] M. M. Kostić and B. M. Kolundzija, "Maximally orthogonalized higher order bases over generalized wires, quadrilaterals, and hexahedra," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 61, no. 6, pp. 3135–3148, 2013.
- [7] J. Rong, L. Wen, and J. Xiao, "Efficiency improvement of the polar coordinate transformation for evaluating BEM singular integrals on curved elements," *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 38, pp. 83–93, Jan. 2014.
- [8] M. G. Duffy, "Quadrature Over a Pyramid or Cube of Integrands with a Singularity at a Vertex," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 19, no. 6, pp. 1260–1262, 1982.