

Evaluation de deux formulations par intégrales de surface pour le contrôle non-destructif des structures métalliques par courants de Foucault

Edouard Demaldent*, Marc Bakry*, Adrien Merlini⁺, Francesco Andriulli[°] et Marc Bonnet[□]

* Université Paris-Saclay, CEA, List, F-91120, Palaiseau, France ; ⁺ IMT Atlantique, France ;

[°] Politecnico de Torino, Italie ; [□] POEMS (CNRS, Inria, ENSTA Paris), France

Email : edouard.demaldent@cea.fr, marc.bakry@cea.fr, adrien.merlini@imt-atlantique.fr,
francesco.andriulli@polito.it, marc.bonnet@ensta-paris.fr

Résumé—On propose une pré-étude comparative entre deux formulations intégrales de surface bien conditionnées pour la résolution des équations de Maxwell dans le régime des courants de Foucault (CF) dans un contexte de contrôle non-destructif des structures. La première, issue d'une approximation asymptotique CF des équations de Maxwell, nécessite une décomposition *loop-star* des courants de surface mais passe par une construction manuelle de *loops* globales sur des géométries non-simplement connexes. La seconde fait intervenir une stabilisation par des projecteurs quasi-Helmholtz, évitant ainsi la construction manuelle des *loop* globales. A terme, les deux formulations seront mises en œuvre sur des cas concrets de CND.

I. INTRODUCTION

Dans le cadre du contrôle non-destructifs des structures (CND) métalliques par courants de Foucault (CF), on est amené à résoudre les équations de Maxwell harmoniques à des fréquences comprises dans la bande [1 kHz, 1000 kHz] pour des conductivités de matériau de l'ordre du méga-Siemens (MS). Cela permet d'évaluer la variation d'impédance des bobines excitatrices pour plusieurs configurations de sources et d'en déduire une information quantitative sur le signal mesuré en présence d'un ou de plusieurs défauts. Plusieurs méthodes, telles que les Eléments Finis, permettent de mener ces études. Les formulations par intégrales de frontière permettent toutefois une modélisation plus aisée des configurations expérimentales complexes, la gestion des sources électromagnétiques, et des maillages qui se limitent aux interfaces entre les milieux. En contrepartie, elles requièrent l'assemblage de matrices pleines ce qui se traduit par un coût de calcul élevé, et sont généralement mal conditionnées. Au sein du CEA-List, une variante asymptotique du problème de Maxwell pour le régime CF [1], [2], est utilisée. Basée sur la formulation classique PMCHWT [9] en les inconnues (\mathbf{J}, \mathbf{M}), notoirement connue pour être instable *numériquement* à basse fréquence, elle fait en particulier intervenir la décomposition de Helmholtz-Hodge de (\mathbf{J}, \mathbf{M}) en une composante à divergence nulle *loop* et son complémentaire *star* pour obtenir la formulation PMCHWT+LT en les inconnues ($\mathbf{J}^L, \mathbf{J}^T, \mathbf{M}^L, \mathbf{M}^T$). Elle présente un défaut majeur sur les géométries non-simplement connexes car la base choisie doit ensuite être complétée par deux fonctions *loop* globales par "trou" dans la topologie. Cette opération est triviale sur un maillage structuré d'une pièce simple mais devient fastidieuse

à faire fonctionner en "boîte noire" sur des maillages issus de CAO quelconques. Afin de pouvoir traiter des cas plus complexes, on se propose d'évaluer une autre formulation [3], [4], [5], désignée par PMCHWT+QH dans la suite, basée sur l'utilisation de projecteurs *quasi-Helmholtz* et qui contourne ce problème.

II. FORMULATIONS INTÉGRALES DANS LE RÉGIME CF

La formulation utilisée au CEA-List est une variante asymptotique de PMCHWT+LT en deux paramètres $\gamma \ll 1$ caractérisant la fréquence par rapport à la conductivité et $\xi = \mathcal{O}(1)$ correspondant à la taille caractéristique de la zone inspectée normalisée par l'épaisseur de peau. Elle prend également en compte le fait que l'excitation vient d'une bobine et est à divergence nulle. Dans ce régime, le calcul de l'impédance des bobines ne fait pas intervenir \mathbf{J}^T et le système 4×4 de PMCHWT+LT dont tous les blocs sont pleins se réduit à un système 3×3 , qu'on désigne par PMCHWT+CF, dont plusieurs blocs sont identiquement nuls ce qui permet à la fois de réduire la complexité de l'assemblage mais aussi celle de la résolution. Cette dernière formulation se prête particulièrement bien à une résolution par solveur direct LU, permettant certaines optimisations comme le stockage sur disque de la factorisation pour utilisation ultérieure avec des seconds membres différents.

La formulation [3] est basée sur l'analyse du comportement asymptotique des opérateurs initialement quand la conductivité σ est fixée et que la fréquence tend vers 0. Elle a ensuite été étendue à d'autres régimes et inclue un préconditionnement pour le problème de géométries densément maillées [6]. Telle que présentée dans [4], [6], son cadre de validité est *différent* de celui de PMCHWT+CF. Elle fait intervenir deux projecteurs *quasi-Helmholtz* sur les sous-espaces *loop* et *star*, et leurs complémentaires sur les espaces primal et dual de Buffa-Christiansen [10]. Sous cette forme, les projecteurs sur les espaces *loop* projettent *implicitement* sur les *loops* globales qu'il n'est donc plus nécessaire d'exprimer. Ces projecteurs sont ensuite normalisés par des constantes faisant intervenir le comportement asymptotique des blocs du système PMCHWT+LT lorsque la fréquence tend vers 0, ainsi que le comportement de la source. Le système final bénéficie alors d'un préconditionnement optimisé en fonction de la fréquence [4], [5].

Il existe d'autres formulations adaptées au régime CF basées sur une formulation intégrale de double-couche [8], [7]. Cependant, des essais préliminaires montrent qu'un plus grand nombre d'inconnues est nécessaire à précision équivalente et elles ne sont pas incluses dans cette étude.

III. ÉTUDE NUMÉRIQUE DU CONDITIONNEMENT

On propose une premier cas d'application numérique *académique* ne correspondant pas à un contexte CND réel. La géométrie est un tore dans le plan (\vec{e}_x, \vec{e}_y) , de rayon $R = 1$ jusqu'au centre de sa section circulaire de rayon $r = 0.3$ et le champ incident est engendré par une bobine (voir FIGURE 1). La conductivité du tore est $\sigma = 10^6$ Siemens (ordre de grandeur pour l'acier) et on suppose qu'il n'est pas ferromagnétique (perméabilité magnétique relative $\mu_r = 1$). La géométrie est discrétisée avec un maillage *structuré* de 512 quadrangles ce qui permet d'assembler (naïvement) la matrice du système en RAM. Dans cette configuration, il faut donc rajouter deux *loops* globales à la base d'approximation en formulation PMCHWT+LT et PMCHWT+CF.

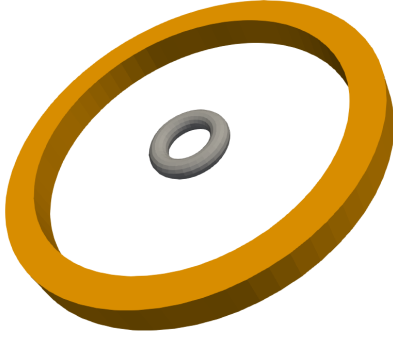


FIGURE 1. Tore (sombre) et bobine excitatrice (doré).

Dans le cadre de cette pré-étude, on observe le conditionnement exprimé pour une matrice \mathbf{A} comme

$$R_{\text{cond}} = \|\mathbf{A}\|_2 \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|_2 \quad (1)$$

pour différentes valeurs de la fréquence d'excitation. On applique en plus un préconditionneur *diagonal* à toutes les formulations.

TABLE I
CONDITIONNEMENT POUR DIFFÉRENTES FRÉQUENCES

f (Hz)	PMCHWT+LT	PMCHWT+CF	PMCHWT+QH
10^{-6}	$1.182 \cdot 10^6$	$7.118 \cdot 10^5$	$1.844 \cdot 10^4$
10^{-2}	$1.489 \cdot 10^4$	$8.931 \cdot 10^3$	$1.702 \cdot 10^4$
10^0	$7.771 \cdot 10^3$	$3.453 \cdot 10^3$	$3.145 \cdot 10^3$
10^2	$9.44 \cdot 10^3$	$3.601 \cdot 10^3$	$1.607 \cdot 10^4$
10^4	$9.208 \cdot 10^3$	$4.088 \cdot 10^3$	$1.169 \cdot 10^6$

Les résultats pour les trois formulations sont représentés dans le TABLEAU I. Pour la plus basse fréquence $f = 10^{-6}$ Hz, le meilleur conditionnement est obtenu pour PMCHWT+QH ce qui n'est pas surprenant dans la mesure où cette formulation est parfaitement adaptée pour les très basses fréquences et conductivité fixée. De plus, la variation d'impédance calculée avec PMCHWT+CF (figure non représentée ici

par manque de place) diverge complètement de la référence établie avec PMCHWT+LT car la fréquence est trop basse ($\xi \ll 1$). Dans la bande $[10^{-2}, 10^2]$ Hz, le conditionnement est excellent pour toutes les formulations. Pour 10^4 Hz, le conditionnement de PMCHWT+QH se dégrade mais la mesure d'impédance, également non-présentée, est conforme à la référence. Ce comportement est attendu dans la mesure où le préconditionneur présenté dans [4] doit être modifié.

IV. CONCLUSION

La formulation PMCHWT+QH permet de fonctionner en "boîte noire" sans avoir à exprimer les *loops* globales. De son côté, la formulation PMCHWT+CF permet des assemblages pleins jusqu'à 100 000 inconnues sur de petits serveurs de calcul et permet certaines optimisations, mais limite la complexité des cas pouvant être traités. PMCHWT+QH est donc très prometteuse pour les études complexes avec un grand nombre d'inconnues une fois que le préconditionneur aura été adapté au régime "CND pour pièces métalliques". Les travaux à venir vont donc porter sur des cas d'application réels (pièces non-canoniques issues de CAO), éventuellement avec de forts raffinements locaux typiques dans la modélisation des fissures. En parallèle, des travaux sur la génération automatique des *loops* globales seront menés afin de maintenir la comparaison avec PMCHWT+CF sur des cas complexes.

RÉFÉRENCES

- [1] M. Bonnet and E. Demaldent, "The eddy current model as a low-frequency, high-conductivity asymptotic form of the Maxwell transmission problem", *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 77, no. 8, pp. 2145-2161, 2019.
- [2] M. Bonnet and E. Demaldent, "Eddy-current asymptotics of the Maxwell PMCHWT formulation for multiple bodies and conductivity levels", *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 141, pp. 80-101, 2023.
- [3] F. P. Andriulli, K. Cools, I. Bogaert and E. Michielssen, "On a Well-Conditioned Electric Field Integral Operator for Multiply Connected Geometries", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 61, no. 4, pp. 2077-2086, 2013.
- [4] T. L. Chhim, A. Merlini, L. Rahmouni, J. E. O. Guzman and F. P. Andriulli, "Eddy Current Modeling in Multiply Connected Regions via a Full-Wave Solver based on the Quasi-Helmholtz Projectors", *IEEE Antennas and propagation*, vol. 1, pp. 534-548, 2020.
- [5] S. B. Adrian, A. Dély, D. Consoli, A. Merlini and F. P. Andriulli, "Electromagnetic Integral Equations : Insights in Conditioning and Preconditioning", *IEEE Antennas and Propagation*, vol. 2, pp. 1143-1174, 2021.
- [6] V. Giunzioni, A. Merlini and F. P. Andriulli, "The Full-Wave Alternative to Eddy-Current Solvers : on a Low-Frequency and Dense-Discretization Stable PMCHWT Equation for Dielectric and Conductive Media", dans *Proceedings of the XXXVth URSI General Assembly and Scientific Symposium-GASS 2023*. URSI-GASS, 2023.
- [7] Q.-A. Phan, O. Chadebec, G. Meunier, J.-M. Guichon and B. Bannwarth, "3-D BEM Formulations for Eddy-Current Problems With Multiply-Connected Domains and Circuit Coupling", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 58, no. 4, 2022.
- [8] Y. Bao and J. Song, "Analysis of electromagnetic non-destructive evaluation modelling using Stratton-Chu formulation-based fast algorithm", *Phil. Trans. R. Soc. A*, vol. 378, 2020.
- [9] A. J. Poggio and E. K. Miller, "Integral Equation Solutions of Three-dimensional Scattering Problems", in R. Mittra, *Computer Techniques for Electromagnetics (chap. 4)*, International Series of monographs in Electrical Engineering, Pergamon, pp. 159-264, 1973.
- [10] A. Buffa and S. H. Christiansen, "A dual finite element complex on the barycentric refinement", *Mathematics of Computation*, vol. 16, pp. 1743-1769, 2007.