

# Discrétisation volumes finis de l'opérateur Rot-Rot pour le calcul du champ magnétique en approximation basse fréquence

W. Poirier<sup>1</sup>, M. Boubekour<sup>2</sup>, A. Kameni<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire de génie électrique de Paris, CentraleSupélec, UMR 8507 CNRS, Université de Paris-Saclay, Sorbone Université  
Plateau de Moulon, 11 rue Joliot curie, 91190, Gif-sur-Yvette, France

<sup>2</sup>LAGA, UMR 7539 CNRS, Université Sorbonne Paris Nord, 99 Avenue J. B. Clément, 93430, Villetaneuse, France

Email : wayne.poirier@centralesupelec.fr

**Résumé**—Dans cet article, nous présentons l'utilisation de la méthode des Volumes Finis pour le calcul du champ magnétique dans des applications basses fréquences. Le travail s'appuie sur la discrétisation de l'opérateur Rot-Rot par un schéma DDFV (Discrete Duality Finite Volume).

## I. INTRODUCTION

Avec l'électrification massive de différents domaines (mobilité, industrie), les besoins de modélisation évoluent en conséquence. Des systèmes plus complexes sont en étude, nécessitant des méthodes de modélisation rapide et efficace. Les Eléments Finis sont utilisés dans de nombreuses situations et logiciels [5], cependant l'évolution du dimensionnement des utilisations pose problème dans la distribution du calcul. En effet, la construction de la matrice de rigidité doit prendre en compte l'interaction entre toutes les mailles. Ainsi, la parallélisation du calcul se fait sur les matrices du problème. A contrario, une discrétisation Volumes Finis s'exprime à l'aide de flux entre cellules voisines. Cela permet de répartir la charge calcul via un partitionnement du domaine de travail. L'utilisation de cette famille de méthode pour la modélisation vient de la mécanique des fluides [4], choisie notamment grâce à une plus grande capacité à prendre en compte l'hétérogénéité d'un milieu. Dans ce papier, nous allons expliciter une discrétisation par schéma diamant et montrer l'intérêt d'une architecture CPU pour ce type de calcul.

## II. MÉTHODE DDFV

### A. Problème étudié

Dans le domaine du génie électrique, le calcul du champ magnétique en basse fréquence conduit très souvent à résoudre la formulation suivante :

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times (\rho \vec{\nabla} \times \vec{H}) = 0 \quad (1)$$

obtenue à partir des équations de Maxwell suivantes :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}, \quad \vec{E} = \rho \vec{J}, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

Où  $\mu_0$  est la perméabilité magnétique dans le vide,  $\vec{H}$  le champ magnétique,  $\vec{J}$  la densité de courant,  $\vec{E}$  le champ électrique et  $\rho$  la résistivité. Dans ce qui suit, nous considérons le cas des matériaux ayant  $\rho$  constant.

Afin d'utiliser la méthode DDFV, on pose  $\rho \vec{\nabla} \times \vec{H} = (F_x, F_y, F_z)$  avec :

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= (0, F_z, -F_y) \\ \vec{F}_2 &= (-F_z, 0, F_x) \\ \vec{F}_3 &= (F_y, -F_x, 0) \end{aligned} \quad (2)$$

Cette notation, énoncée dans [1] permet alors d'écrire le rotationnel en forme conservative :

$$\vec{\nabla} \times (\rho \vec{\nabla} \times \vec{H}) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}_1, \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_2, \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_3) \quad (3)$$

### B. Le schéma diamant

Pour deux cellules voisines  $\tau^+$  et  $\tau^-$ , nous notons  $\sigma$  la face entre ces dernières. On définit alors  $x_\sigma$  comme le barycentre de cette face. Cela permet de définir deux demi-diamants  $\mathcal{D}_{\sigma, \tau^+}$  et  $\mathcal{D}_{\sigma, \tau^-}$  comme présentés par Fig. 1 et décrit en détail dans [2]. Pour  $\tau^+, \tau^-, S^+$  et  $S^-$ , nous notons  $x_{\tau^+}, x_{\tau^-}, x_{S^+}$

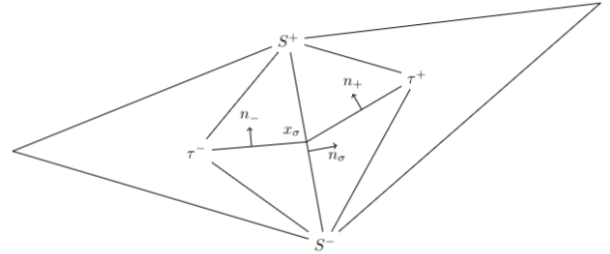


FIGURE 1. Diamant entre les cellules  $\tau^+$  et  $\tau^-$

et  $x_{S^-}$  les points à ces positions respectives. En supposant l'orientation  $\det(x_{\tau^+} - x_{\tau^-}, x_{S^+} - x_{S^-}) > 0$ , nous avons donc :

$$2\mathcal{D}_{\sigma, \tau^\pm} = \pm \det(x_{\tau^\pm} - x_\sigma, x_{S^+} - x_{S^-})$$

définissant la mesure des deux demi-diamants ainsi que l'orientation de  $\vec{n}_-$  et  $\vec{n}_+$ , normales respectives de  $x_\sigma - \tau^-$  et  $\tau^+ - x_\sigma$ . Nous posons également les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \vec{N}_\sigma &= n_\sigma |x_{S^+} - x_{S^-}| \\ \vec{N}_\pm &= n_\pm |x_\sigma - x_{S^\pm}| \end{aligned}$$

### C. Discrétisation

Nous notons  $\vec{H}_\sigma$  la valeur  $\vec{H}(x_\sigma)$  et prolongeons cet abus de notations à l'ensemble des points présentés. Nous écrivons également  $\vec{H}_h$  la discrétisation de la fonction  $\vec{H}$  que nous cherchons à déterminer. Nous discrétisons la variable temporelle de manière implicite avec la notation suivante :

$$\frac{\partial \vec{H}_h}{\partial t} = \frac{\vec{H}_h^n - \vec{H}_h^{n-1}}{\Delta t}$$

Par la suite, si l'indice temporel est omis, alors celui-ci est égal pour l'ensemble des termes. Par une intégration par partie, détaillée dans [3], sur chacun des diamants nous obtenons :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_{\sigma,\tau^-} \times \vec{H}_h &= \\ \frac{1}{2\mathcal{D}_{\sigma,\tau^-}} (\vec{N}_\sigma \times (\vec{H}_\sigma - \vec{H}_{\tau^-}) + \vec{N}_- \times (\vec{H}_{S^+} - \vec{H}_{S^-})) \\ \vec{\nabla}_{\sigma,\tau^+} \times \vec{H}_h &= \\ \frac{1}{2\mathcal{D}_{\sigma,\tau^+}} (\vec{N}_\sigma \times (\vec{H}_{\tau^+} - \vec{H}_\sigma) + \vec{N}_+ \times (\vec{H}_{S^+} - \vec{H}_{S^-})) \end{aligned}$$

Pour le calcul de  $\vec{H}$  sur les noeuds du maillage, nous utilisons une approximation par moindre carré dont le détail se trouve en annexe de [3]. Le calcul de  $\vec{H}_\sigma$  est explicité en fin de section. Cela nous permet de définir :  $\vec{F}_{i,\sigma,\tau^\pm}^n$  pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ , formule discrete de (2) à partir de :

$$(\vec{\nabla}_{\sigma,\tau^-} \times \vec{H}_h^n) \quad \text{et} \quad (\vec{\nabla}_{\sigma,\tau^+} \times \vec{H}_h^n)$$

Une intégration par partie de (1) sur les cellules du maillage  $\mathcal{T}_h$  donne :

$$\sum_{\tau \in \mathcal{T}_h} \mu_0 \frac{\vec{H}_h^n - \vec{H}_h^{n-1}}{\delta t} + \int_{\partial\tau} \vec{n} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H}_h^n) ds = 0$$

En utilisant le formalisme (3), nous avons alors :

$$\sum_{\tau \in \mathcal{T}_h} \mu_0 \frac{\vec{H}_h^n - \vec{H}_h^{n-1}}{\delta t} + \int_{\sigma \in \partial\tau} \begin{pmatrix} \vec{n}_\sigma \cdot \vec{F}_{1,\sigma,\tau^\pm}^n \\ \vec{n}_\sigma \cdot \vec{F}_{2,\sigma,\tau^\pm}^n \\ \vec{n}_\sigma \cdot \vec{F}_{3,\sigma,\tau^\pm}^n \end{pmatrix} ds \quad (4)$$

qui correspond à la discrétisation sur le maillage primal de (1). Nous utilisons alors la notation  $\vec{\mathcal{F}}_{\sigma,\tau^\pm}$  pour définir le flux de la cellule  $\tau^\pm$  associé à la face  $\sigma$ . Ici :

$$-\vec{\mathcal{F}}_{\sigma,\tau^\pm}^n = \pm \begin{pmatrix} \vec{n}_\sigma \cdot \vec{F}_{1,\sigma,\tau^\pm}^n \\ \vec{n}_\sigma \cdot \vec{F}_{2,\sigma,\tau^\pm}^n \\ \vec{n}_\sigma \cdot \vec{F}_{3,\sigma,\tau^\pm}^n \end{pmatrix}$$

Enfin, nous définissons la variable de face comme vérifiant l'égalité des flux  $\vec{\mathcal{F}}_{\sigma,\tau^-} + \vec{\mathcal{F}}_{\sigma,\tau^+} = 0$ .

### III. APPLICATION

Un calcul de (1) en 2D est donné Fig. 2. Avec comme conditions de Dirichlet la fonction :

$$f_D \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \quad (5)$$

Nous appliquons ces conditions fortement à l'aide de la méthode des grands nombres ; un coefficient de  $10^{70}$  est placé

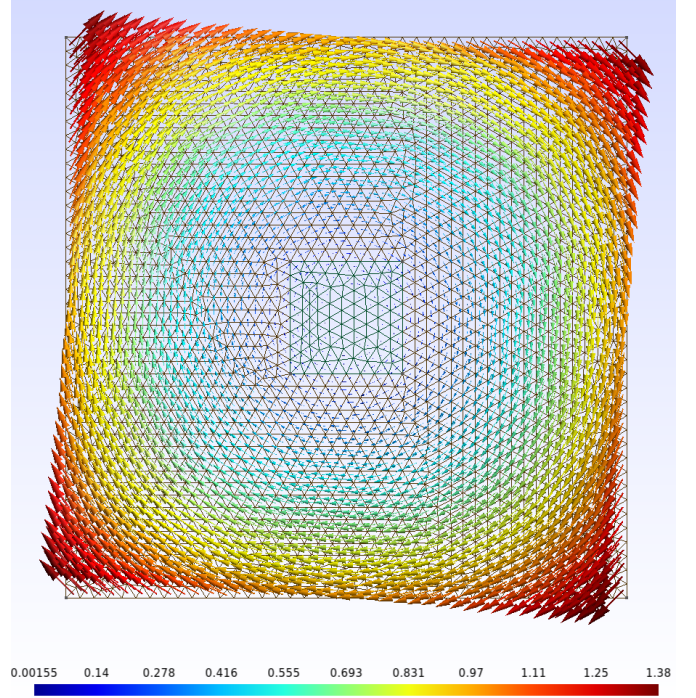


FIGURE 2. Champs solution de (1) pour les conditions aux bords (5).

sur la diagonale des mailles de bords. Le pas de temps est de  $10^{-6}$  et le domaine utilisé est le carré défini par  $[-1, 1]^2$ . On remarque que la solution obtenue correspond à la solution analytique et qui est l'extension de  $f_D$  sur tout le domaine.

### A. Conclusion

Dans ce travail, nous avons présenté le calcul du champ magnétique en utilisant une formulation en  $H$  des équations de Maxwell. Une méthode volume finis a été présentée et le schéma diamant a été utilisé pour le calcul du rotationnel sur les interfaces. Une comparaison avec une solution analytique a été présentée pour illustrer la méthode. Pour les futurs travaux. Une non linéarité sera introduite pour calculer le champ magnétique dans un matériau supraconducteur dont le comportement est donné par une loi puissance.

### RÉFÉRENCES

- [1] Ludovic Didier Makong Hell Nkatak, Abelin Kameni Ntichi, Frédéric Bouillault, Philippe Masson. Nodal discontinuous Galerkin method for high-temperature superconductors modeling based on the H-formulation. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2017, 31 (2), pp.1 - 4.
- [2] Vincent Baron, Yves Coudière and Pierre Sochala. Comparison of DDFV and DG Methods for Flow in Anisotropic Heterogeneous Porous Media, Oil & Gas Science and Technology – Revue d'IFP Energies nouvelles, vol. 69, pp. 673-686, 2013.
- [3] Jan Karel. Numerical simulation of streamer propagation on unstructured dynamically adapted grids, Université Paris-Nord - Paris XIII, (2014)
- [4] Huy Cuong Vu Do. Numerical methods for flow and transport in porous media. Numerical Analysis [math.NA]. Université Paris Sud - Paris XI, 2014.
- [5] B. Shen, F. Grilli and T. Coombs, "Overview of H-Formulation : A Versatile Tool for Modeling Electromagnetics in High-Temperature Superconductor Applications," in IEEE Access, vol. 8, pp. 100403-100414, 2020