

Application des Méthodes Intégrales de Volume pour l'Optimisation Topologique de Circuits Magnétiques

Sophie Michel, Frédéric Messine et Jean-René Poirier
LAPLACE, ENSEEIHT-INPT, Université de Toulouse, France

Email : michel@laplace.univ-tlse.fr

Résumé—Cet article présente un résultat d'une structure magnétique 3D issue d'une optimisation topologique. Le processus d'optimisation choisi, fait intervenir un calcul de gradient qui est calculé par la méthode adjointe en utilisant les équations provenant des méthodes intégrales de volume.

I. INTRODUCTION

En électromagnétisme, il existe de nombreuses méthodes pour la simulation numérique. Pour des dispositifs comportant un grand volume d'air, les méthodes intégrales de volume peuvent être envisagées [1]. En effet, le principal avantage de ces méthodes est que seuls les parties ferromagnétiques (les parties actives) sont à mailler. Dans la littérature, plusieurs de ces méthodes ont été développées. Nos travaux sont basés sur la Méthode de Moments Magnétiques (*MMM*) [2] et la Formulation en Potentiel Scalaire [3]. Ces formulations intégrales seront utilisées dans la méthode adjointe pour calculer le gradient lié à un algorithme itératif d'optimisation. Cette méthode adjointe est basée sur les conditions de *Karush-Kuhn-Tucker* [4]. Dans la littérature, les méthodes adjointes sont souvent développées en utilisant les équations de résolution par éléments finis [5].

II. MÉTHODES INTÉGRALES DE VOLUME

Les méthodes intégrales offrent une bonne précision de calcul du champ électromagnétique dans l'air. Ces méthodes sont basées sur la résolution d'équations intégrales. Leurs utilisations nécessitent d'introduire des variables intermédiaires conduisant à la résolution d'un système linéaire. Les variables utilisées peuvent être les moments induits dans la partie ferromagnétique, le potentiel vecteur, le potentiel scalaire... La *MMM* est la plus ancienne et la plus connue des méthodes intégrales de volumes, nous nous sommes intéressés à cette méthode ainsi qu'à celle utilisant le potentiel scalaire car son utilisation fait intervenir moins d'inconnues dans la résolution du système linéaire.

A. Méthode des Moments Magnétiques

Le principe de la *MMM* est d'introduire une aimantation \mathbf{M} dans le matériau ferromagnétique et de la considérer comme une source. Ceci permet de calculer le champ \mathbf{H} dans n'importe quel point de l'espace $P \in \Omega$ en utilisant l'équation :

$$\mathbf{H}(\mathbf{M}, P) = \mathbf{H}_s(P) + \mathbf{H}_m(\mathbf{M}, P) \quad (1)$$

\mathbf{H}_s , le terme lié à la source est calculé par la loi de Biot et Savart, c'est une donnée du problème. \mathbf{H}_m est le champ

induit par l'aimantation induite que nous avons introduite, il se calcule en utilisant l'opérateur linéaire \mathbf{L}_X , définit pour toute partie X de l'espace Ω :

$$\mathbf{L}_X : (L^2(X))^3 \times \Omega \setminus X \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (2)$$

$$(\mathbf{M}, P) \mapsto \frac{1}{4\pi} \int_X \left(\frac{3\mathbf{M}(Q) \cdot (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q)}{\|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q\|_{\mathbb{R}^3}^5} (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q) - \frac{1}{\|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q\|_{\mathbb{R}^3}^3} \mathbf{M}(Q) \right) dX_Q$$

Ainsi, on obtient :

$$\mathbf{H}_m(\mathbf{M}, P) = \mathbf{L}_{\Omega_V}(\mathbf{M}, P) \quad (3)$$

Ω_S et Ω_V sont respectivement la partie source et la partie ferromagnétique. L'aimantation \mathbf{M} est calculée au préalable en résolvant l'équation intégrale :

$$\forall P \in \Omega_V, \mathbf{M}(P) = \chi \mathbf{H}(\mathbf{M}, P), \quad (4)$$

$$\mathbf{M}(P) - \chi \mathbf{L}_{\Omega_V}(\mathbf{M}, P) = \chi \mathbf{H}_s(P)$$

où χ est la susceptibilité magnétique du matériau.

B. Formulation en Potentiel Scalaire

La formulation en Potentiel Scalaire est une méthode intégrale utilisant aussi l'aimantation induite dans la partie ferromagnétique, mais sans la calculer directement. Sachant que le champ \mathbf{H} dérive d'un potentiel scalaire Ψ , il est possible d'écrire :

$$\forall P \in \Omega_V, \mathbf{H}(P) = -\nabla \Psi(P) \quad (5)$$

$$\mathbf{M}(P) = -\chi \nabla \Psi(P)$$

Ainsi, il est possible de calculer directement le champ n'importe où dans Ω :

$$\mathbf{H}(\Psi, P) = \mathbf{H}_s(P) + \mathbf{H}_m(\Psi, P) \quad (6)$$

avec :

$$\mathbf{H}_m(\Psi, P) = \mathbf{L}_{\Omega_V}(-\chi \nabla \Psi, P) \quad (7)$$

Le potentiel scalaire est calculé dans la partie ferromagnétique en utilisant le fait qu'il soit, comme le champ magnétique, la somme de deux termes :

$$\Psi(P) = \Psi_s(P) + \Psi_m(P) \quad (8)$$

avec Ψ_s liée à la source et Ψ_m lié à l'aimantation induite telle que :

$$\Psi_m(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_V} \frac{\mathbf{M}(Q) \cdot (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q)}{\|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q\|^3} d\Omega_{V_Q}$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_V} \chi \frac{\nabla \Psi(Q) \cdot (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q)}{\|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q\|^3} d\Omega_{V_Q} \quad (9)$$

Ainsi, le potentiel scalaire est calculé en résolvant l'équation intégrale :

$$\forall P \in \Omega_V, \Psi(P) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_V} \chi \frac{\nabla \Psi(Q) \cdot (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q)}{|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q|^3} d\Omega_{V_Q} = \Psi_s(P) \quad (10)$$

III. APPLICATION POUR L'OPTIMISATION TOPOLOGIQUE DE CIRCUIT MAGNÉTIQUE

A. Formulation du Problème de Design

Le problème d'optimisation topologique 3D a pour but de modifier une zone variable Ω_V d'un matériau ferromagnétique linéaire, de perméabilité magnétique μ_r , afin d'obtenir, dans une zone cible Ω_T , un champ magnétique connu. Le problème à résoudre est :

$$(\mathcal{P}) \left\{ \min_{\mu_r \in \mathcal{A}} F(\mu_r) = \int_{\Omega_T} \|\mathbf{B}(\mu_r, P) - \mathbf{B}_0\|^2 d\Omega_{T_P} \right.$$

où $\mu_r \in \mathcal{A} = \{L^\infty(\Omega_V) \mid \mu_r(x) \in \{\mu_{r_{min}}, \mu_{r_{max}}\}, \forall x \in \Omega_V\}$.

Afin de résoudre ce problème, un processus itératif incluant un calcul de gradient à chaque itération a été utilisé. Une méthode adjointe utilisant les équations intégrales a été développée et mise en place afin d'éviter l'utilisation des différences finies qui peut être très coûteuse en temps de calcul pour les problèmes de grande taille.

Les deux méthodes adjointes utilisant les méthodes intégrales de volume présentées seront comparés en termes de résultats et de temps de calcul. En effet, utilisant un processus itératif pour résoudre le problème, il est important de constater que les résolutions pour chacune des méthodes est différentes en termes de précision et de résolution de système linéaire. Les tailles des matrices des systèmes linéaires à résoudre sont variables en fonction de la formulation choisie et de la taille du maillage. La visualisation d'une structure 3D étudiée est présentée en Fig. 1. C'est uniquement cette partie qui est à mailler.

La méthode adjointe liée au problème (\mathcal{P}) a été développée en considérant une variable μ_r continue dans $\mathcal{A}_c = \{L^\infty(\Omega_V) \mid \mu_r(x) \in [\mu_{r_{min}}, \mu_{r_{max}}], \forall x \in \Omega_V\}$. Le problème a donc été relaxé, pouvant faire intervenir des matériaux "intermédiaires" dont la perméabilité magnétique est comprise entre $\mu_{r_{min}}$ et $\mu_{r_{max}}$. C'est pour cette raison que les méthodes de pénalisation SIMP sont envisagées. Celles-ci ont pour but de forcer la variable utilisée à être aux extrêmes de son intervalle de valeurs possibles.

Une bobine parcourue par un courant de densité J est placée sur la partie inférieure de la structure ferromagnétique.

B. Résultats de design optimisés

Une fois les outils de simulation numérique mis en place, ils ont été intégrés dans le code d'optimisation. Celui-ci a été implémenté et testé pour une structure magnétique 3D. Dans l'exemple présenté, le gradient est calculé par la méthode adjointe incluant les équations de la *MMM*. Le but du test est de générer un champ \mathbf{H}_0 dans une zone cible placée dans l'entrefer Ω_T avec une structure connue présentée Fig. 2a, puis d'utiliser le processus d'optimisation à partir d'un point

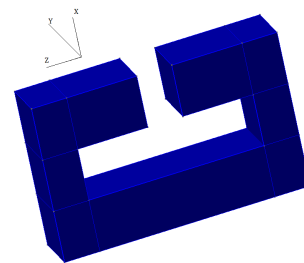


FIGURE 1 – Visualisation de la structure ferromagnétique ; la bobine (non représentée) est au milieu de l'hyperrectangle en bas

de départ quelconque pour retrouver cette structure. Pour cet exemple, le maillage comporte 4320 éléments. La pénalisation utilisée est la pénalisation polynomiale, [5].

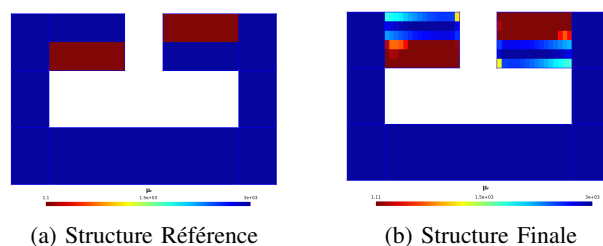


FIGURE 2 – Vue de face du circuit magnétique 3D optimisé

Le résultat issu du processus d'optimisation est présenté Fig. 2b. En bleu, on voit les mailles où l'on a du matériau ferromagnétique et en rouge de l'air. Les évaluations de la fonction F pour le point de départ ainsi que pour le résultat obtenu sont présentés Tab. I.

TABLE I – Détails de la résolution pour le processus d'optimisation

$F_{debut}(\mu_r)$	$F_{fin}(\mu_r)$	Itérations	Temps de résolution
1991	0.004	1871	41h

Bien que l'algorithme ait convergé vers une solution proche de celle de référence, il reste des éléments "intermédiaires" où la perméabilité du matériau est comprise entre celle de l'air ($\mu_{r_{min}}$) et celle du matériau choisi ($\mu_{r_{max}}$). Cette structure nécessitera un post traitement pour obtenir un résultat final manufacturable.

RÉFÉRENCES

- [1] B. Trowbridge, "Integral equations in electromagnetics", International journal of numerical modelling : electronic networks, devices and fields, vol. 9, pp. 3—17, 1996.
- [2] O. Chadebec, J-L. Coulomb et F. Janet, "A Review of Magnetostatic Moment Method", dans Transactions on magnetics, IEEE, vol. 42, no. 4, 2006.
- [3] A. Carpentier, "Formulation intégrale de volume magnéto-statique et calcul des densités de force magnétique : Application au couplage magnéto-mécanique", Thèse de Doctorat, Université de Grenoble, 2014
- [4] J. Nocedal et S. J. Wright, "Numerical optimization", Springer, 1999
- [5] S. Sanogo et F. Messine, "Topology optimization in electromagnetism using simp method : Issues of material interpolation schemes", COMPEL., vol. 37, no. 6, pp. 2138-2157, 2018.