

# Modèles multi-échelles pour les problèmes magnétoquasistatiques non-linéaires avec courants induits confinés

Innocent Niyonzima, Antoine Marteau, Gérard Meunier, Olivier Chadebec, Nicolas Galopin  
Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP, G2ELab, Grenoble, France

Email : innocent.niyonzima@univ-grenoble-alpes.fr

**Résumé**—La conception optimale de dispositifs électriques avec des matériaux composites magnétiques nécessite le développement de modèles multi-échelles efficaces qui prennent en compte les défis posés par la modélisation de ces matériaux. Ces défis incluent la structure multi-échelles 3D, la non-linéarité des inclusions dans la microstructure, ainsi que la présence de courants induits nécessitant des techniques de remontée de champs adaptées. Dans ce papier, nous proposons des formulations multi-échelles pour les composites périodiques.

## I. INTRODUCTION

L'usage croissant des composites magnétiques en électrotechnique est indéniable. Ces matériaux permettent des applications à des fréquences plus élevées (de quelques kHz à quelques MHz) tout en réduisant les pertes ferromagnétiques. Historiquement, ces matériaux étaient obtenus par compaction d'une poudre de billes magnétiques dans une matrice isolante. L'avènement des techniques d'impression 3D permet de fabriquer des composites avec une microstructure plus complexe avec des propriétés magnétiques souhaitées. Cependant, l'utilisation de ces matériaux rend impératif le développement de modèles numériques 3D adaptés à leur modélisation.

Les principaux défis liés à la modélisation des composites magnétiques sont : (1) La présence de matériaux non linéaires tels que les matériaux ferromagnétiques ou supraconducteurs. (2) Les géométries 3D pouvant conduire à des topologies complexes de champs électromagnétiques. (3) Le caractère multi-échelle des champs et la violation de la séparation d'échelle qui peut se produire lorsque l'épaisseur de peau  $\delta$  ou la longueur d'onde  $\lambda$  deviennent comparables à la taille de la cellule. (4) La présence de courants de Foucault qui nécessite des techniques de remontée des champs bien adaptées. (5) La prise en compte des distributions stochastiques des inclusions dans la microstructure.

Dans le passé, l'utilisation des techniques d'homogénéisation et des méthodes multi-échelles pour modéliser le comportement des composites magnétiques était principalement limitée aux problèmes périodiques 2D, qu'ils soient linéaires ou non, et parfois avec des techniques de remontée des champs homogénéisés qui n'étaient pas toujours adaptées à la présence des courants induits. Dans cet article, nous abordons les quatre premiers points pour développer les formulations multi-échelle des problèmes électromagnétiques basse fréquence dans le cadre périodique. Bien que les deux formulations duales aient été récemment développées par les

auteurs [1], [2], dans ce papier nous allons nous concentrer sur les formulations  $\mathbf{h}$ -conformes.

## II. FORMULATIONS FAIBLES $\mathbf{h}$ -CONFORMES

Dans cette section, nous présentons succinctement les formulations classiques et multi-échelles de type  $\mathbf{h}$ -conformes en présence d'inducteurs massifs.

### A. Formulations $\mathbf{h}$ -conformes du problème complet

Dans un domaine ouvert  $\Omega = \Omega_c \cup \Omega_c^C$ , la forme faible du problème de référence est défini par [3], [4] : pour presque tout  $t \in [0, T]$ , trouver le champ magnétique  $\mathbf{h}^\varepsilon$  dans un espace fonctionnel approprié tel que pour toutes les fonctions test  $\mathbf{v}$ , la forme faible suivante soit vérifiée :

$$\left( \partial_t \mathbf{B}(\mathbf{h}^\varepsilon), \mathbf{v} \right)_\Omega + \left( \rho \operatorname{curl} \mathbf{h}^\varepsilon, \operatorname{curl} \mathbf{v} \right)_{\Omega_c} = 0. \quad (1)$$

Dans (1),  $\rho$  est la conductivité électrique et  $\mathbf{B}(\mathbf{h}^\varepsilon)$  représente une loi magnétique non linéaire du matériau. Au niveau discret,  $\mathbf{h}^\varepsilon$  peut se décomposer comme [4] :

$$\mathbf{h}^\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \sum_{e \in \Omega_c} h_e(t) \mathbf{S}_e(\mathbf{x}) + \sum_{n \in \Omega_c^C} \phi_n(t) \operatorname{grad} S_n(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{N_{\text{ind}}} \mathcal{I}_i(t) \mathbf{c}_i(\mathbf{x}), \quad (2)$$

où le premier terme de (2) présent dans les conducteurs est interpolé à l'aide des éléments de Nédélec, le second terme présent dans les domaines non conducteurs est interpolé comme un gradient d'une fonction nodale continues tandis que le dernier terme tient compte de la multiple connexité du domaine non-conducteur  $\Omega_c^C$ .  $N_{\text{ind}}$  est le nombre d'inducteurs. Les courants et tensions sont liées par une équation obtenue en imposant les fonctions tests  $\mathbf{c}_i$  dans (1) :

$$\left( \partial_t \mathbf{B}(\mathbf{h}^\varepsilon), \mathbf{c}_i \right)_\Omega + \left( \rho \operatorname{curl} \mathbf{h}^\varepsilon, \operatorname{curl} \mathbf{c}_i \right)_{\Omega_c} = V_i. \quad (3)$$

### B. Formulations multi-échelle $\mathbf{h}$ -conforme

La formulation multi-échelle s'écrit : pour presque tout  $t \in [0, T]$ , trouver le champ macroscopique  $\mathbf{h}_M$  et les champs mésoscopiques périodiques  $[\mathbf{h}_c] = \left( \mathbf{h}_c^{(1)}, \dots, \mathbf{h}_c^{N_{\text{GP}}} \right)$  correspondant aux  $N_{\text{GP}}$  solutions mésoscopiques tels que pour toutes les fonctions tests  $(\mathbf{v}_M, [\mathbf{v}_c])$  avec  $[\mathbf{v}_c] =$

$(\mathbf{v}_c^{(1)}, \dots, \mathbf{v}_c^{N^{\text{GP}}})$ , les formes faibles suivants soient vérifiées :

$$\begin{aligned} \left( \partial_t \mathbf{B}_M(\mathbf{h}_M, [\mathbf{h}_c]), \mathbf{v}_M \right)_{\Omega} + \left( \rho \mathbf{curl}_x \mathbf{h}_M, \mathbf{curl}_x \mathbf{v}_M \right)_{\Omega_c} &= 0, \\ \left( \partial_t \mathbf{B}(\mathbf{h}_M + \mathbf{h}_c^{(i)}), \mathbf{v}_c^{(i)} \right)_{\Omega_m^i} + \left( \rho \mathbf{curl}_y \mathbf{h}_c^{(i)}, \mathbf{curl}_y \mathbf{v}_c^{(i)} \right)_{\Omega_{mc}^i} &= 0, \end{aligned}$$

avec  $i = 1, 2, \dots, N^{\text{GP}}$  qui représente les points de Gauss du domaine macroscopique.

Dans ces équations,  $\mathbf{B}_M$  est le champ d'induction macroscopique homogénéisé et qui dépend des solutions mésoscopiques  $[\mathbf{h}_c]$  calculées sur des domaines méso autour du point de Gauss. Le système d'équations non linéaires est discrétisé à l'aide du schéma d'Euler implicite et linéarisées à l'aide de la méthode de Newton-Raphson. Par conséquent, le champ d'induction  $\mathbf{B}_M$  et la reluctivité incrémentale macroscopique  $\partial \mathbf{B}_M / \partial \mathbf{h}_M$  doivent être remontés à chaque itération non linéaire de chaque pas de temps.

### C. Remontées des champs électromagnétiques

Le champ d'induction macro  $\mathbf{B}_M$  est remonté par simple moyennage du champ d'induction magnétique méso :

$$\mathbf{B}_M = \frac{1}{|\Omega_m|} \int_{\Omega_m} \mathbf{B}(\mathbf{h}_M + \mathbf{h}_c^{(i)}) dy, \quad (5)$$

avec  $\mathbf{h}_M$  le champ macroscopique,  $\mathbf{h}_c^{(i)}$  le champ mésoscopique et  $|\Omega_m|$  le volume du domaine méso.

La reluctivité incrémentale macroscopique  $(\partial \mathbf{B}_M / \partial \mathbf{h}_M)^{(i)}$  au point de Gauss est remontée en appliquant la méthode des différences finies aux solutions des problèmes magnétostatiques suivants : trouver les solutions périodiques  $\varphi_c^{(i,j)}$  d'un espace approprié tel que pour tout champ test  $v_c^{(i,j)}$  la forme faible suivante soit vérifiée :

$$\left( \mathbf{B}(\mathbf{h}_M + \delta_j + \mathbf{grad} \varphi_c^{(i,j)}), \mathbf{grad} v_c^{(i,j)} \right)_{\Omega_m} = 0. \quad (6)$$

Dans (6),  $\delta_j = \delta e_j$  est la perturbation le long de la direction  $e_j$  et  $j = 1, 2, 3$  and  $i = 1, 2, \dots, N^{\text{GP}}$ .

Dans le cas de la formulation  $\mathbf{b}$ -conforme, Le champ magnétique homogénéisé  $\mathbf{H}_M$  est obtenu en soustrayant la contribution du champ magnétisant responsable des courants confinés du champ magnétique total dans la cellule. Les détails sur cette formulation seront fournies dans la version longue du papier.

## III. RÉSULTATS

Nous considérons une géométrie de composites magnétiques doux avec des inclusions conductrices et magnétiques en forme de sphère, avec les propriétés de matériaux suivantes :

1. L'air et l'isolant sont non magnétiques et non-conducteurs avec une perméabilité relative  $\mu_r = 1$  et  $\sigma = 0$ .
2. Inclusions conductrices et magnétiques avec  $\sigma = 10^7 \text{ S/m}$  une loi magnétique non linéaire de type Fröhlich-Kennely (plus de détails dans [5]).

Les problèmes sont alimentés par une source de courant sinusoïdal  $I_s(t) = I_{s0} \sin(2\pi f t)$ . Les simulations sont réalisées

en utilisant Gmsh [6] pour la génération de géométries et de maillages ainsi que pour le post-traitement, et GetDP [7] pour les simulations numériques.

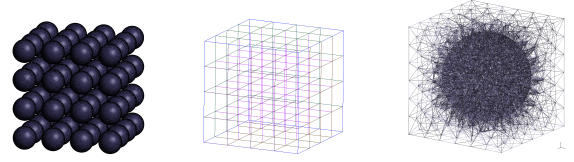


FIGURE 1. Gauche : géométrie de référence avec  $4 \times 4 \times 4$  inclusions (seul 1/8 de la géométrie est utilisée grâce à la symétrie). Milieu : maillage macroscopique. Droit : maillage de la cellule périodique

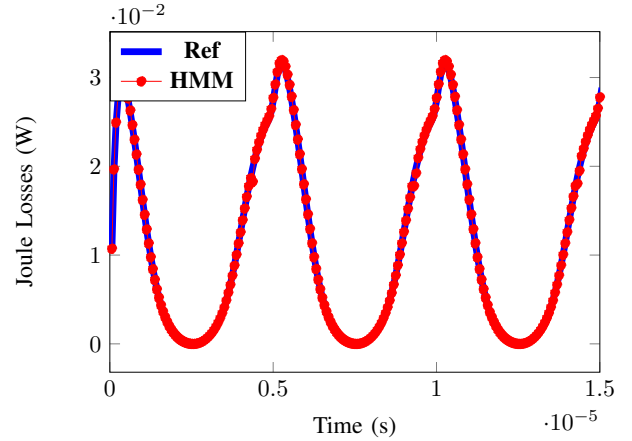


FIGURE 2. Pertes Joule de référence obtenues par résolution éléments finis sur une géométrie fine (courbe bleue) et par la méthode multi-échelle (courbe rouge).

Plus de détails sur la formulation multi-échelle  $\mathbf{h}$ -conforme et les détails de la formulation multi-échelle  $\mathbf{b}$ -conforme et la remontée de champs  $\mathbf{H}_M$  seront donnés dans le papier long.

## RÉFÉRENCES

- [1] Antoine Marteau, *Multiscale Modeling of Electromagnetic Fields Applied to Nonlinear Transient Problems*, PhD Thesis, Université Grenoble Alpes, 2024.
- [2] J. Ruuskanen, A. Marteau, I. Niyonzima, A. Halbach, J. Vesa, G. Meunier, T. Tarhassari and P. Rasilo, *Multiharmonic multiscale modeling in 3-D nonlinear magnetoquasistatics : Composite material made of insulated particles*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 425, 116945, 2024.
- [3] R. Hiptmair and O. Sterz, *Current and voltage excitations for the eddy current model*. International Journal of Numerical Modelling : Electronic Networks, Devices and Fields, 18(1), 1-21, 2005.
- [4] P. Dular, C. Geuzaine and W. Legros, *A natural method for coupling magnetodynamic  $\mathbf{h}$ -formulations and circuit equations*, IEEE TRANSMAG, vol 35, number 3, 1626-1629, 1999.
- [5] C. H. Lee, F. Reitich, M. R. Jolly, H. T. Banks and K. Ito, *Piecewise linear model for field-responsive fluids*. IEEE transactions on magnetics, 37(1), 558-560, 2001.
- [6] C. Geuzaine and J. F. Remacle, *Gmsh : A 3-D finite element mesh generator with built-in pre-and post-processing facilities*. International journal for numerical methods in engineering, 79(11), 1309-1331, 2009.
- [7] P. Dular, C. Geuzaine, F. Henrotte and W. Legros, *A general environment for the treatment of discrete problems and its application to the finite element method*. IEEE transactions on magnetics, 34(5), 3395-3398, 1998.